

# La conquête de l'espace courbe

Jean-Marc Lévy-Leblond

# Les géométries

Géométries  
euclidiennes  
2-D, 3-D,  $n$ -D...

Géométries  
riemanniennes  
(ex. géométrie sphérique)

Géométries  
pseudo-riemanniennes  
(ex. géométrie minkowskienne)

# Géométrie euclidienne

Euclide (III<sup>e</sup> siècle av. J.-C.), *Eléments*

## “Postulats”

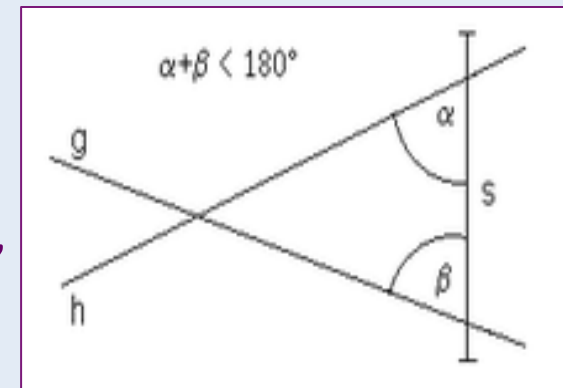
- 1) Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts.
- 2) Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
- 3) Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
- 4) Tous les angles droits sont congruents.
- 5) ...

# Géométrie euclidienne

Euclide, *Eléments*

## Le cinquième Postulat

5) « Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits. »



En langage plus moderne :

« Si une droite coupe deux autres droites en déterminant deux angles internes dont la somme soit différente de deux angles droits, alors les deux droites se coupent dans le demi-plan pour lequel la somme est inférieure à deux angles droits. »

# Géométrie euclidienne

## Equivalents du Cinquième Postulat

« Par un point donné, on peut mener une et une seule parallèle à une droite donnée. » Proclus

« Il existe des quadrilatères à quatre angles droits. »

« La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits. » Legendre

« Il existe des triangles semblables de toutes les tailles. » Wallis

# Tentatives incessantes pour *démontrer* le cinquième postulat :

- Archimède (IIIe siècle av JC.)
- Posidonios (IIe siècle av JC.)
- Ptolémée (IIe siècle)
- Proclus (Ve siècle)
- Thabit ibn Qurra (IXe siècle)
- Al-Abbās ibn Saïd al-Jawharī (IXe siècle)
- Alhazen (Xe-XIe siècles)
- Omar Khayyam (XIe siècle)
- Nasir ad-Din at-Tusi (XIIe siècle)
- Gersonide (XIVe siècle)
- Giovanni Alfonso Borelli (XVIIe siècle)
- Vitale Giordano (XVIIe siècle)
- John Wallis (XVIIe siècle)
- Giovanni Girolamo Saccheri (XVIIIe siècle)
- Johann Heinrich Lambert (XVIIIe siècle)
- Adrien-Marie Legendre (XVIIIe-XIXe siècles)

# Géométries non-euclidiennes

XIXe siècle : on peut faire de la géométrie sans le Cinquième postulat — c'est donc bien un postulat...

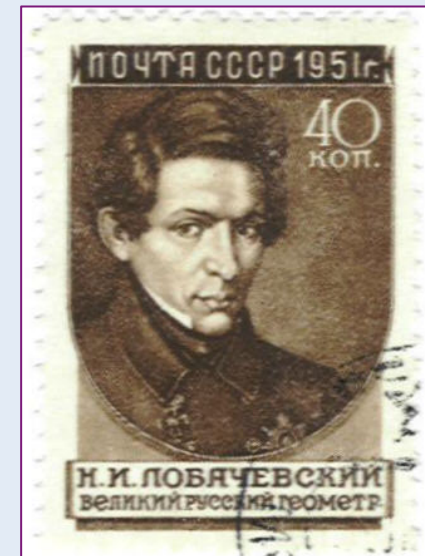
- Carl Friedrich Gauss (1777-1855), 1810-1820 (non publié)
- János Bolyai (1802-1860), 1820-1823 (publié 1832)
- Nikolai I. Lobatchevsky (1792-1856), 1829



Fleurance, 08/08/13



JMLL-Géométries



6

# Géométries non-euclidiennes

Les “géométries non-euclidiennes” deviennent **la géométrie**, avec la géométrie euclidienne comme cas (très) particulier

- Bernhard Riemann (1826-1866), 1854
- Eugenio Beltrami (1835-1900), 1868
- Felix Klein (1849-1925), 1871



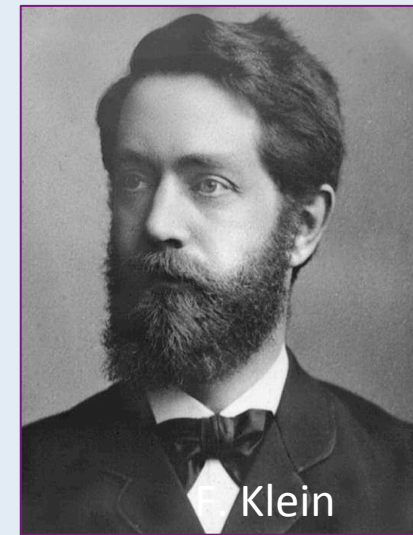
B. Riemann

Fleurance, 08/08/13



E. Beltrami

JMLL-Géométries

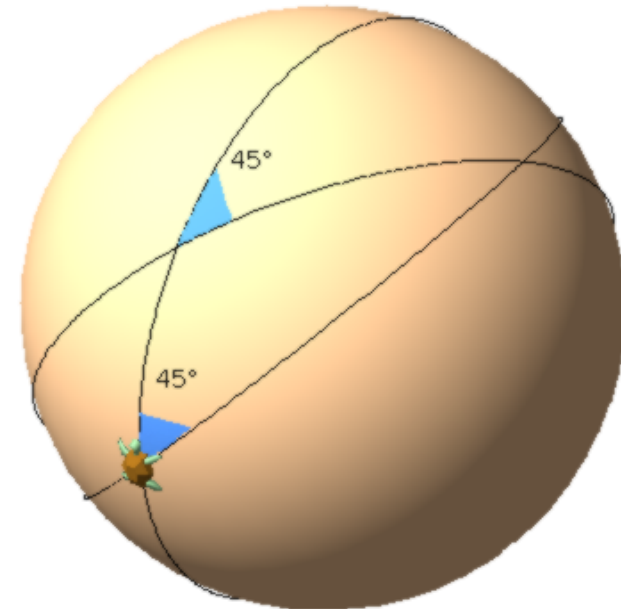


F. Klein



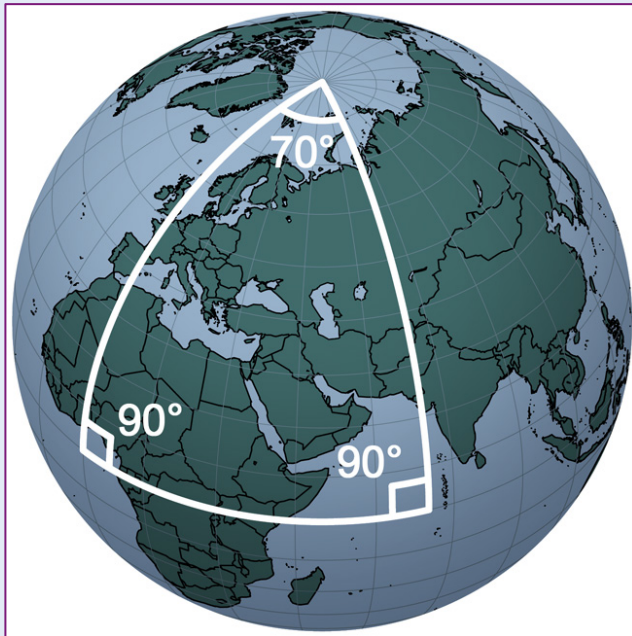
# Géométrie sphérique

- Espace 2-D : surface d' une sphère 3-D
- Distance : longueur calculée *sur la sphère*
- Géodésiques : arcs de grand cercles
  - Pas de parallèles : deux géodésiques se coupent toujours.
  - La somme des angles d'un triangle est toujours supérieure à deux droits.
  - Espace fini sans limites



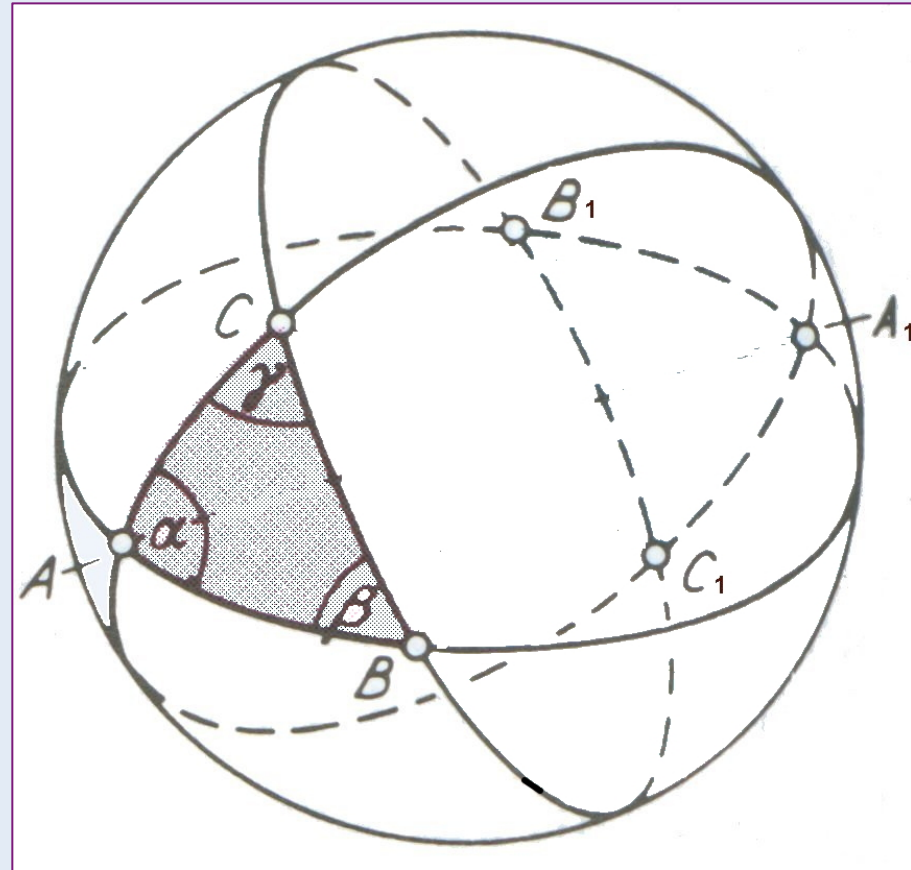
# Géométrie sphérique

## Triangle sphérique



### Formule de Girard

(Albert Girard, 1595-1632)



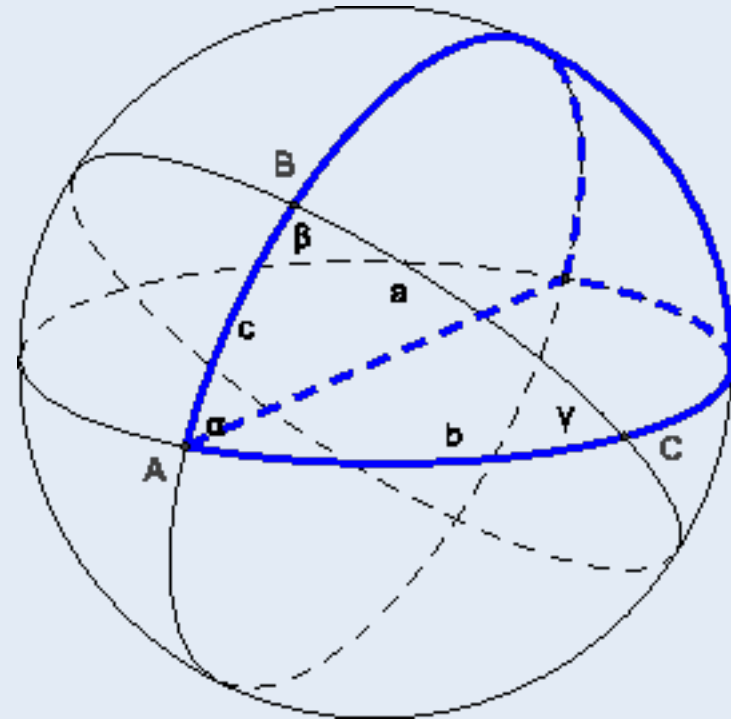
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{Aire}ABC/R^2$$

# Géométrie sphérique

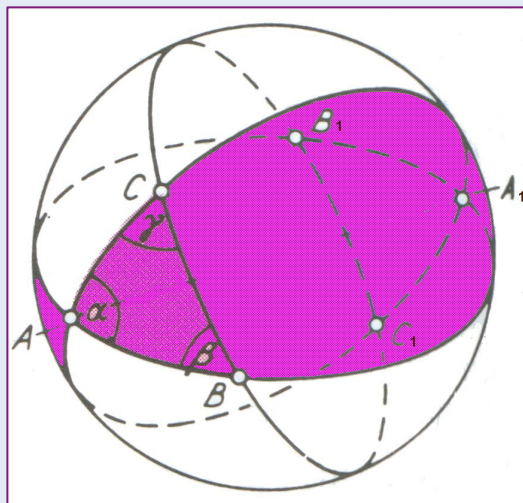
L'aire d'un fuseau sphérique est proportionnelle à l'angle entre les deux plans qui le délimitent, et doit être égale à l'aire totale de la sphère, soit  $4\pi R^2$  pour  $\alpha = 2\pi$ .

Donc :

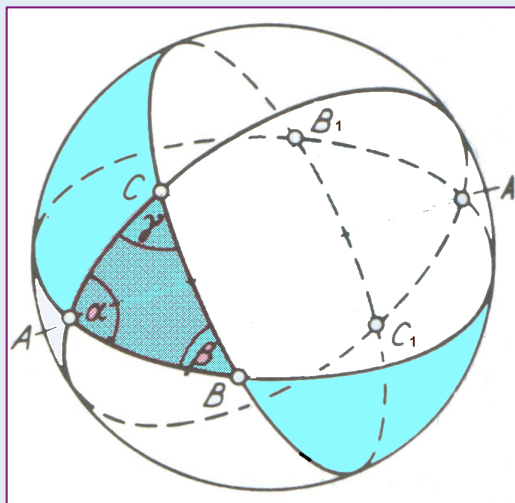
$$\text{Aire fuseau} = 2\alpha R^2$$



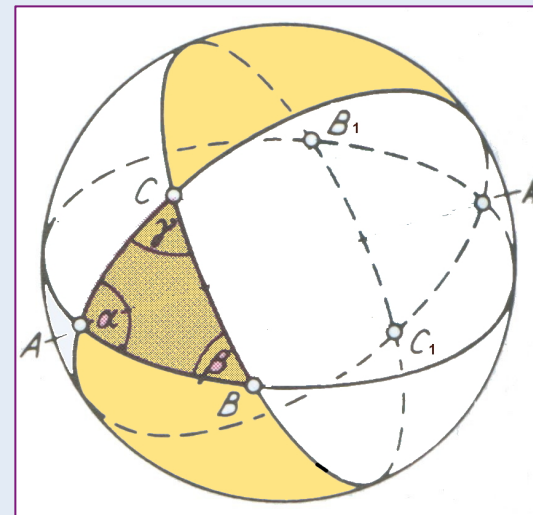
# Géométrie sphérique



$$\text{Aire } AA_1 = 4\alpha R^2$$



$$\text{Aire } BB_1 = 4\beta R^2$$



$$\text{Aire } CC_1 = 4\gamma R^2$$

$$\begin{aligned} \text{Aire totale des trois fuseaux} &= 4(\alpha + \beta + \gamma)R^2 \\ &= \text{Aire totale sphère} + 4 \text{ Aire triangle } ABC = 4\pi R^2 + 4 \text{ Aire } ABC \end{aligned}$$

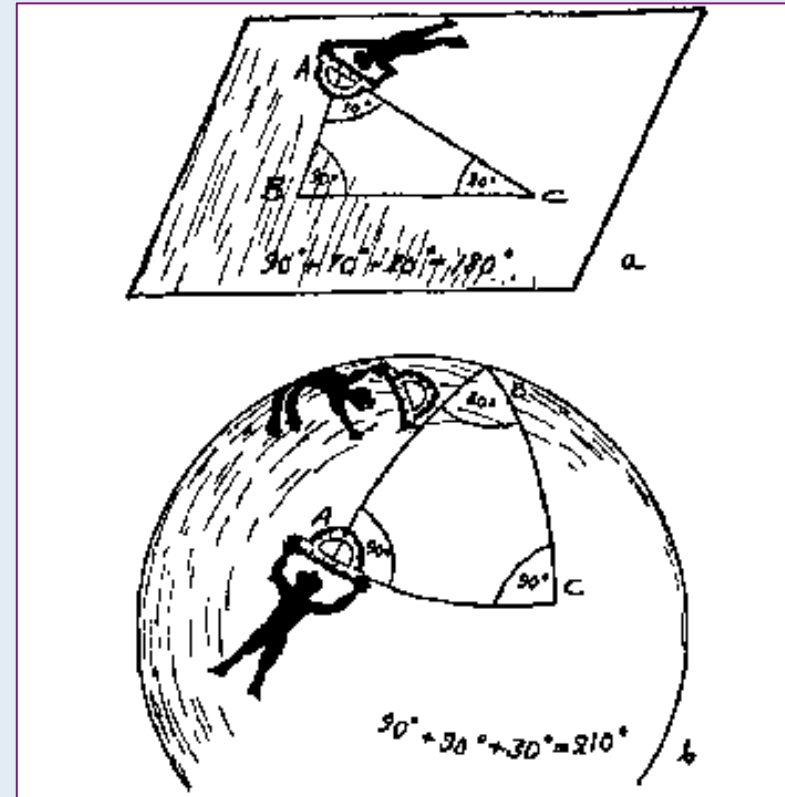
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{Aire } ABC / R^2$$

# Géométrie sphérique

## Courbure de Gauss

On peut caractériser le caractère non-euclidien de la géométrie sphérique sans sortir de la surface !

La courbure est une propriété intrinsèque.



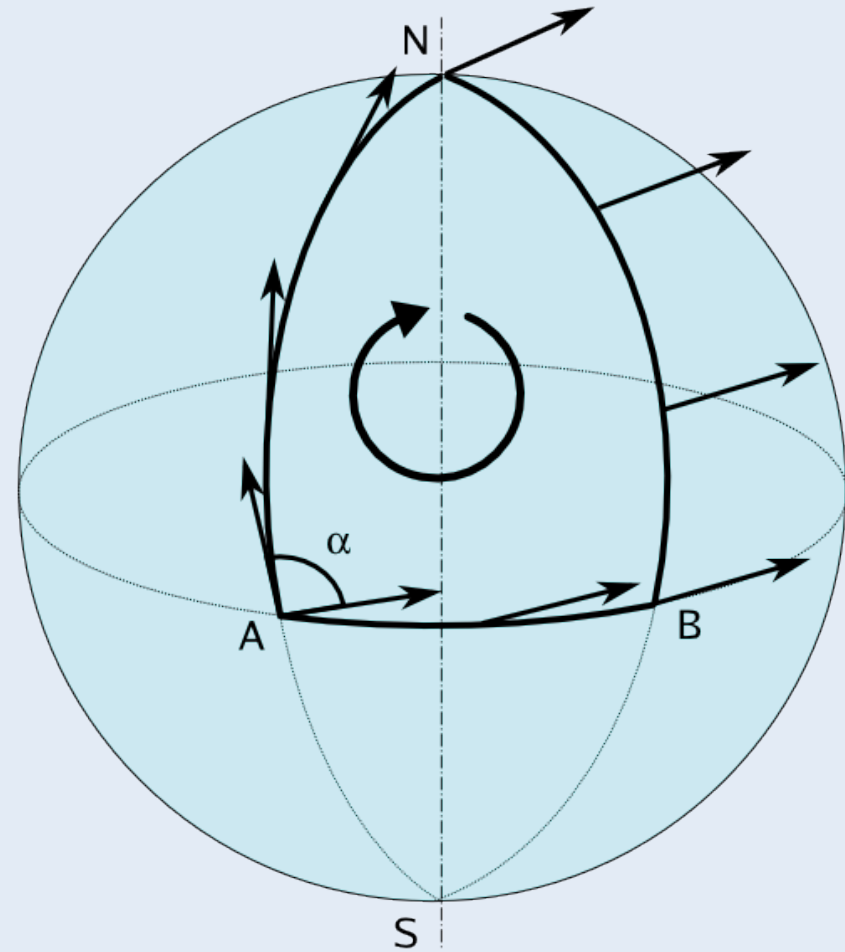
$$1/R^2 = [(\alpha + \beta + \gamma) - \pi] / \text{Aire}(ABC) := \text{“courbure”}$$

# Géométrie sphérique

## Transport parallèle

Tullio Levi-Civita (1873 – 1941)

Sur une surface courbe, le transport parallèle d'un vecteur tangent le long d'une courbe fermée (défini par le fait qu'il fait toujours le même angle avec la courbe) entraîne un changement de direction qui dépend de la courbure)



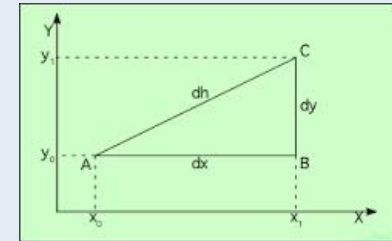
# Géométries riemanniennes 2-D

Espaces à  $n$  dimensions équipés d'une **métrique** (notion de distance).

**Géodésiques** : plus courts chemins

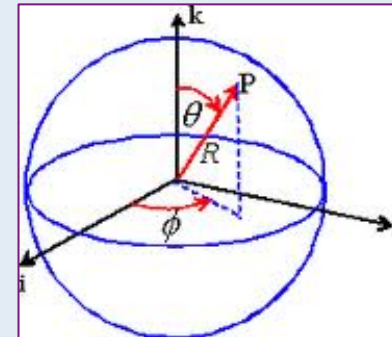
Géométrie euclidienne 2-D

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (\text{Pythagore !})$$



Géométrie sphérique 2-D

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

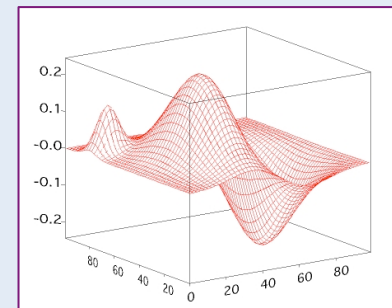


Géométrie riemannienne 2-D

$$ds^2 = g_{xx}(x,y) dx^2 + 2g_{xy}(x,y) dx dy + g_{yy}(x,y) dy^2$$

Courbure de Gauss :

$$K = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_{yy}}{\partial x^2} \right)$$



# Géométries riemanniennes $n$ -D

Espaces à  $n$  dimensions équipés d'une **métrique** (notion de distance).  
**Géodésiques** : plus courts chemins

Géométrie euclidienne  $n$ -D

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \text{etc.}$$

Géométrie riemannienne  $n$ -D

$$ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij}(x) dx_i dx_j$$

“forme quadratique” **définie positive**

Soit  $ds^2 \geq 0$  pour que  $ds$  existe comme quantité réelle positive et puisse être interprétée comme une “vraie” distance.

Tenseur de courbure



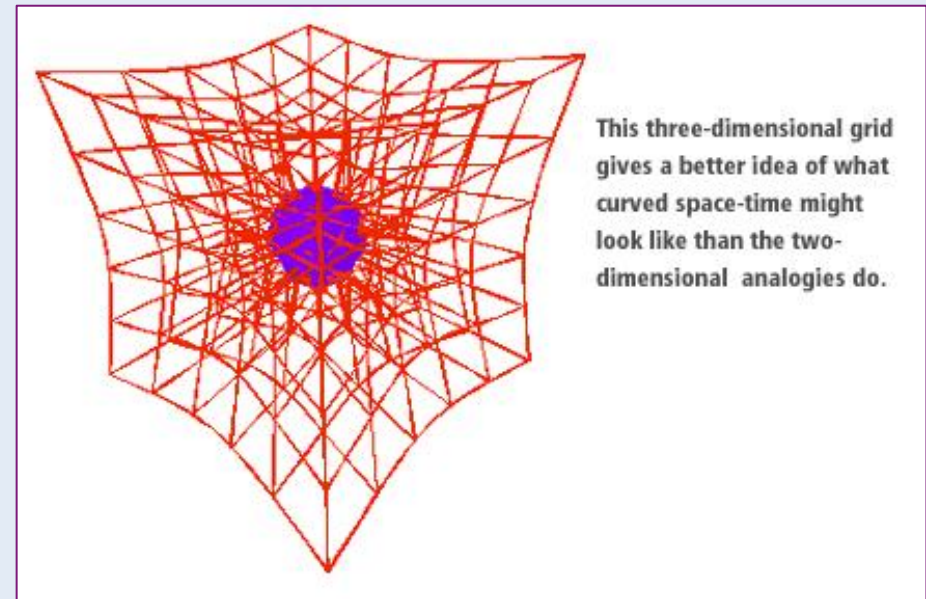
# Représenter un espace courbe ?

...sans le plonger dans un espace de dimensionnalité supérieure !

2-D : projection d'une sphère sur un plan euclidien



3-D : projection d'un espace courbe dans un espace euclidien





Planisphere de Sylvanus (1511)

# Géométries pseudo-riemanniennes

Espace à  $n$  dimensions équipés d'une **pseudo-métrique**

$$ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij}(x) dx_i dx_j$$

où la forme quadratique  $g$  n'est plus nécessairement définie positive

- plus de notion de distance
- géodésiques : chemins extrémaux (min ou max)

La relativité générale décrit la structure spatio-temporelle de l'univers par une telle géométrie.

# Géométrie minkowskienne

Hermann Minkowski (1864-1909)

Géométrie des nombres (1885-1905)

Espace et temps (1908)



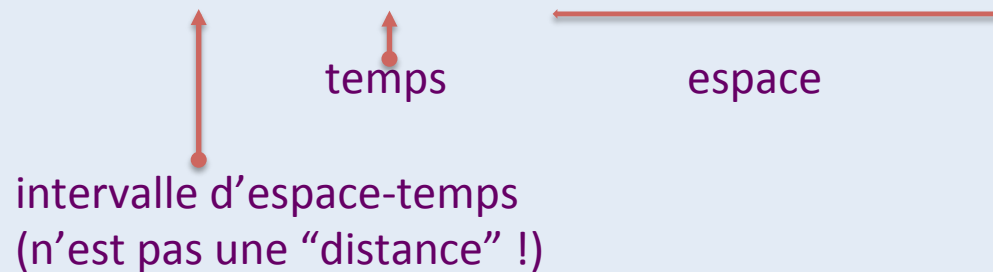
# Géométrie minkowskienne

Espace à 4 dimensions équipé d'une pseudo-métrique

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dz_3^2$$

Ou encore :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

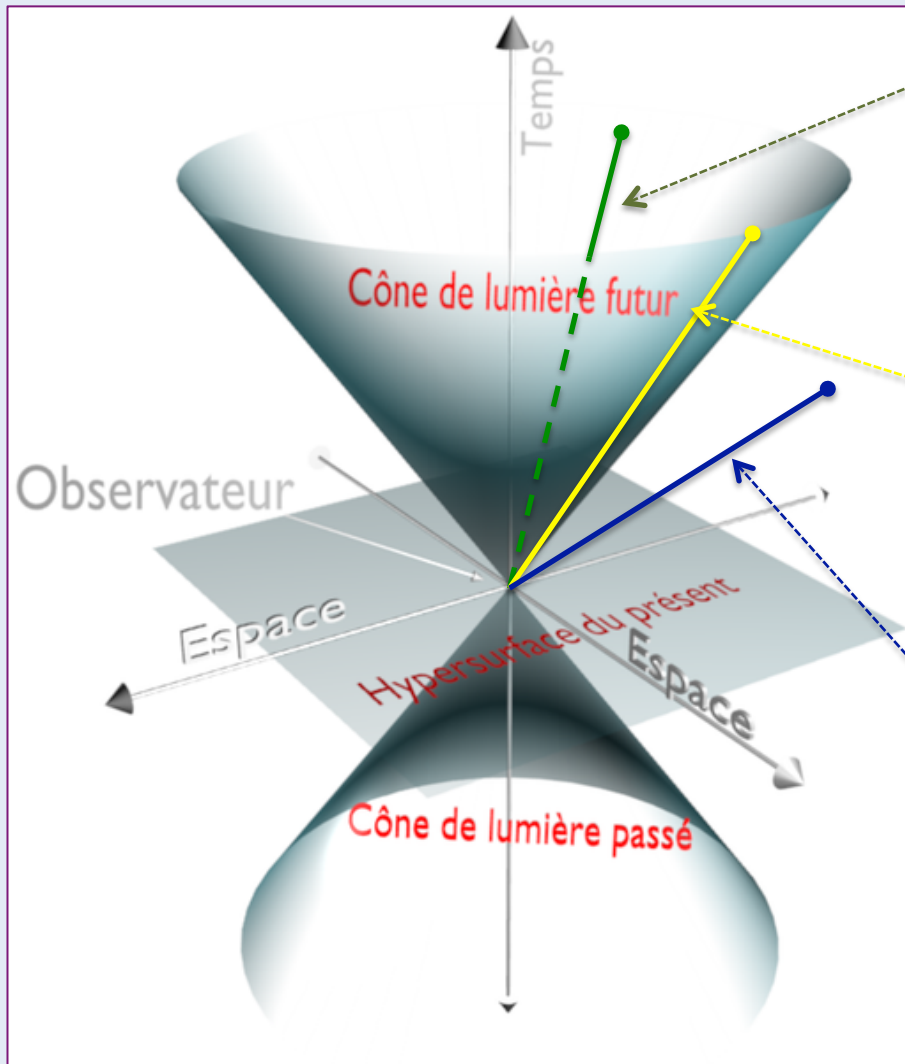
  
intervalle d'espace-temps  
(n'est pas une "distance" !)

Il vaut mieux dire espace à (1+3) dimensions !

Il s'agit d'une "chronogéométrie".

L'espace de Minkowski est "plat" (pseudo-euclidien).

# Géométrie minkowskienne (1+2)-D



Intervalle de genre-temps

$$ds^2 > 0$$

(peut être transformé en intervalle purement temporel par changement de référentiel)

Intervalle de genre-lumière

$$ds^2 = 0$$

(ne peut être transformé en par changement de référentiel)

Intervalle de genre-espace

$$ds^2 > 0$$

(peut être transformé en intervalle purement spatial par changement de référentiel)

# Rotations 2-D

Invariance de la distance

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2$$

# Pseudo-rotations (1+1)-D

## Transformations de Lorentz

Invariance de la pseudo-distance

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = dt'^2 - dx'^2$$



# Espace-temps newtonien

En rétablissant la constante  $c$

$$ds^2 = dt^2 - dx^2/c^2 = dt'^2 - dx'^2/c^2$$

Si  $dt \gg dx/c$ , alors  $dt \cong dt'$

temps absolu newtonien !

# Effets einsteiniens

## Mesures de durées

# Effets einsteiniens

## Mesures de longueurs