À la découverte de quelques astres extrêmes : supernovae, étoiles à neutrons, trous noirs

Alain Riazuelo

5 août 2008

Le but de cet atelier est d'essayer de mieux appréhender quelques uns des astres les plus extrêmes de l'univers : les supernovae, explosions cataclysmiques qui signent la fin de la vie de certaines étoiles, ainsi que les produits de ces explosions, les étoiles à neutrons et les trous noirs.

L'accent sera mis sur des applications numériques issues de formules simple, afin de cerner les ordres de grandeurs, pour certains réellement astronomiques, qui caractérisent ces objets.

Quelques quantités numériques

Constantes fondamentales

- Vitesse de la lumière : $c = 299\,792\,458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
- Constante de gravitation : $G = 6{,}672 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$
- Constante de Planck : $h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$
- Masse du neutron : $m_{\mathrm{n}} = 1{,}6744 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
- Perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot C^{-2}}$

Données sur le Soleil

- Rayon du Soleil : $R_\odot \simeq 6{,}5 \times 10^5\ \mathrm{km} = 6{,}5 \times 10^8\ \mathrm{m}$
- Masse du Soleil : $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$
- Luminosité solaire : $L_\odot \simeq 4 \times 10^{26}\ \mathrm{W} = 4 \times 10^{26}\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}}$

Conversions d'unités

- 1 année lumière $= 365{,}25 \times 24 \times 60 \times 60 \times 299\ 792\ 458 \simeq 9{,}47 \cdot 10^{15}$ mètres, soit environ 10 mille milliards de kilomètres
- 1 radian $= \frac{180}{\pi} \times 3600$ secondes d'arc, soit $206\,264{,}81''$
- 1 parsec $= 3{,}26$ années lumière
- 1 milliard d'années $= 10^9 \times 365{,}25 \times 86400$ secondes, soit $3{,}16 \cdot 10^{16}$ s

1 Supernovae

Une supernova est le nom donné à la phase finale de la vie d'une étoile, qui provoque sa destruction et laisse éventuellement derrière elle un résidu compact. Le terme de supernova regroupe en fait deux phénomènes bien distincts :

- Une étoile dont les réactions nucléaires se sont arrêtées (ce que l'on appelle une naine blanche) devient instable si sa masse atteint une certaine valeur critique, appelée masse de Chandrasekhar. Cette masse critique, qui vaut environ 1,4 fois la masse du Soleil peut être atteinte soit suite à un transfert de matière issu d'une étoile compagnon, soit suite à une collision avec cette étoile. L'instabilité provoque un redémarrage instantanné et massif des réactions nucléaires au sein de l'étoile, à l'instar d'une bombe thermonucléaire géante. On parle ainsi de supernova thermonucléaire. La totalité de l'étoile est par la suite dissipée par l'explosion et forme une nébuleuse appelée rémanent de supernova.

- Le cœur d'une étoile massive peut être soumis à la même instabilité. Cette fois, aucune réaction nucléaire n'est possible car toutes celles qui étaient possibles se sont déjà produites dans le cœur de l'étoile, grâce à sa température très élevée. Dans ce cas, il n'existe plus de forces de pression suffisante pour assurer la cohésion du cœur, qui s'effondre (se contracte violemment) sous son propre poids pour atteindre une taille très petite de quelques dizaines de kilomètres. On parle alors de supernova à effondrement de cœur. Le cœur va par la suite donner naissance à une étoile à neutrons ou un trou noir. Les couches externes tombent alors sur ce cœur compact et sont disloquées par l'onde de choc résultante. Ces couches externes sont soufflées du cœur de l'étoile et forment là encore un rémanent de supernova dont le plus connu est la célèbre Nébuleuse du Crabe, premier objet du catalogue Messier (M1) et à l'origine de la réalisation de celui-ci[1].

Par la suite, nous nous intéresserons principalement aux supernovae à effondrement de cœur.

1.1 Taux de supernovae galactiques

L'analyse des documents astronomiques écrits, principalement issus du monde chinois, révèle des témoignages pouvant aujourd'hui être interprétés comme étant l'observation de l'explosion de supernovae. Huit témoignages de ce type, étalés sur en 2000 ans, semblent entrer dans cette catégorie. Ils ont été produits en 185, 386, 393, 1006, 1054, 1181, 1572 et 1604. L'observation révèle qu'aucune de ces explosions observées n'était distante de plus de 4 kiloparsecs.

- Le rayon de notre Galaxie étant de l'ordre de 12 kiloparsecs, quel est le nombre approximatif de supernovae s'étant produites depuis 2000 ans, en supposant que toutes celles moins éloignées de 4 kiloparsecs ont effectivement été observées ?
- Ce chiffre est-il compatible avec un taux estimé par d'autres méthodes (étude des populations stellaires galactiques) et 1 à 4 supernovae par siècle ?

1.2 Énergie d'une supernova à effondrement de cœur

Un objet plongé dans un champ de gravitation doit dépenser de l'énergie pour s'en extraire. Par exemple, un objet de masse m ne peut s'extraire du champ gravitationnel terrestre qu'en utilisant une quantité d'énergie E donnée par

$$E = \frac{GMm}{R},$$

R et M étant le rayon et la masse de la Terre. C'est par exemple l'énergie qu'une fusée doit communiquer à une sonde spatiale dédiée à l'exploration planétaire. Plus généralement, on peut déterminer l'énergie nécessaire pour éloigner les uns des autres des objets liés par la gravitation. Cette énergie s'écrit

$$E_{\text{eff}} = \xi \frac{GM^2}{R},$$

[1] Vers 1758, le français Charles Messier guettait le retour de la comète de Halley, suivant les calculs effectués auparavant par Edmund Halley. La comète devait faire son retour dans la constellation du Taureau. En observant cette région du ciel, Messier découvrit une nébulosité qu'il interpréta comme étant le faible éclat de la comète, encore fort loin du Soleil. Par la suite, cette nébulosité s'avéra être fixe dans le ciel et ne pas suivre la trajectoire attendue de la comète. Induit en erreur par cet objet céleste, Messier entreprit de réaliser un catalogue de ces nébulosités afin de ne pas les prendre par erreur pour des comètes. Il donna naturellement le numéro 1 à cet objet dans son catalogue. Ce n'est que dans le courant des années 1920 que fut réalisé par Edwin Hubble et Knut Lundmark que cette nébuleuse était très probablement le reste d'une explosion observée par les astronomes d'extrême orient en l'an 1054 de notre ère. Pour cela, ils se basèrent sur l'observation de l'expansion de la nébuleuse qui rendait possible sa datation, et sur les témoignages historiques qui plaçaient cette "étoile invitée", comme elle était appelée dans le monde chinois, à deux degrés de l'étoile dénommée *Tianguan*, correspondant à l'étoile ζ Tauri selon sa dénomination occidentale.

ξ étant une constante dépendant du profil de densité de l'objet, que l'on prendra ici égale à 0,4. À l'inverse, rassembler un ensemble d'objets de masse totale M en une structure sphérique de rayon R libère une énergie E comparable.

- Calculer l'énergie libérée par une supernova à effondrement de cœur, dont le cœur fait la masse de Chadrasekhar (1,4 masse solaire) et le rayon 10 kilomètres.
- Comparer la valeur trouvée à l'énergie de masse $E_{\mathrm{m}} = Mc^2$ de l'étoile.
- Comparer cette énergie à celle libérée par le Soleil durant toute sont existence, soit $0{,}007 M_\odot c^2$, $M_\odot$ étant la masse du Soleil.
- L'effondrement du cœur se produit en un temps très bref, correspondant essentiellement au temps de chûte libre d'un objet situé en périphérie de celui-ci. Ce temps est donné par la formule (issue de la troisième loi de Kepler, qui donne la période de révolution des planètes en fonction du rayon de leur orbite)

$$t_{\mathrm{cl}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8}\frac{R_{\mathrm{i}}^3}{GM}},$$

  R_{i} étant le rayon initial du cœur de l'étoile (environ 5 000 kilomètres). Calculer ce temps d'effondrement.
- La puissance émise est donnée par le rapport de l'énergie au temps d'effondrement, soit

$$L_{\mathrm{eff}} = \frac{E_{\mathrm{eff}}}{t_{\mathrm{cl}}}.$$

  Calculer cette puissance, et la comparer à la luminosité solaire $L_\odot$ (valeur donnée en introduction). Pouvait-on deviner ce résultat ?
- En réalité, l'énergie résultant de l'effondrement est libérée sous la forme de particules appelées neutrinos. Ces particules sont créées en un temps très bref (t_{cl}), mais sont piégées dans le cœur de l'étoile, duquel elle mettent un temps plus grand t_{diff} d'une dizaine de secondes pour s'échapper. Quelle est alors la puissance effectivement libérée lors de l'effondrement ?
- Les neutrinos interagissent très peu avec la matière ordinaire. Seulement 1% de leur énergie est déposée sur les couches externes de l'étoile. Calculer l'énergie correspondante E_{env}.
- En supposant que les couches externes représentent une masse M_{env} de 5 masses solaires[2], calculer la vitesse V à laquelle elles sont éjectées par rapport au cœur à partir de la formule

$$E_{\mathrm{env}} = \frac{1}{2} M_{\mathrm{env}} V^2.$$

1.3 Supernovae et neutrinos

Le seul moyen efficace de libérer l'énergie produite par l'effondrement est, comme on l'a dit, d'émettre ces particules appelées neutrinos. L'énergie de ces neutrinos est fonction de la température extraordinairement élevée produite par l'effondrement. Les calculs (et l'observation directe, voir plus bas) indiquent que l'énergie de ces neutrinos atteint 10 megaélectronvolts, soit $1,6 \cdot 10^{-12}$ joules.

- Calculer l'ordre de grandeur du nombre de neutrinos émis lors de l'effondrement.
- En 1987 on assista à l'explosion d'une supernova dans le Grand Nuage de Magellan, situé à une distance D environ égale 170 000 années-lumière. Le détecteur de neutrinos Super Kamiokande était alors en service. Ce détecteur était composé d'un grand réservoir d'eau (rayon r de 20 mètres) tapissé de photomultiplicateurs chargés de détecter le rayonnement issu de l'interaction d'un neutrino avec une molécule d'eau. Vérifier que la proportion de neutrinos émis par la supernova et étant passés dans le détecteur est égale à

$$f = \frac{r^2}{4D^2}.$$

[2]La masse initiale d'une étoile qui explose en supernova [eut être bien plus grande que 5 ou 10 masses solaires, mais elle perd une partie conséquente de celle-ci dans les phases qui précèdent l'explosion.

- Calculer le nombre de neutrinos que cela représente.
- Les neutrinos sont des particules qui intéragissent extrêmement peu avec la matière ordinaire. En conséquence, moins d'un neutrino sur 10^{16} a effectivement interagi avec l'eau de Super Kamiokande. Quel est le nombre de neutrinos effectivement détectés ?

2 Étoiles à neutrons

Une étoile à neutrons est un des résidus possibles formé à la suite d'une supernova à effondrement de cœur. Le cœur de la supernova, d'une masse de 1,4 masse solaire environ, se contracte jusqu'à ce que les forces nucléaires responsables des interactions entre neutrons et protons dans un noyau atomique prennent le pas sur la gravité et stoppent l'effondrement. Ceci se produit lorsque la densité de la matière de l'étoile à neutrons est de l'ordre de (en fait légèrement supérieure à) la densité d'un noyau atomique. Observationnellement, les étoiles à neutrons émettent un flot de particules énergétiques à partir de leurs pôles magnétiques. Ces particules sont par la suite responsable d'une émission de rayonnement dans un très grand intervalle de longueurs d'ondes, allant des ondes radio aux rayons X. Cette émission se fait le long de l'axe magnétique de l'étoile, qui n'est pas aligné avec son axe de rotation. L'émission parcourt donc au cours du temps un cône qui balaie tel un phare l'espace. Au final on détecte les pulsars par une émission périodique de rayonnement, en général dans le domaine radio, dont la période révèle la rotation de l'astre sur lui-même. Pour cette raison on appelle également ces objets pulsars.

2.1 Rayon d'une étoile à neutrons

La taille typique d'une particule élémentaire λ_{c} de masse m est donnée par la formule

$$\lambda_{\mathrm{c}} = \frac{h}{2\pi mc}$$

.

1. Calculer λ_{c} pour un neutron
2. Calculer la masse volumique $\mu = m/\lambda_{\mathrm{c}}^3$ de ces particules
3. Calculer la taille typique $R \simeq N^{\frac{1}{3}}\lambda_{\mathrm{c}}$ d'une étoile à neutrons, N étant le nombre de nucléons (protons ou neutrons) qu'elle contient, donné par la formule $N = M_{\mathrm{EN}}/m_{\mathrm{n}}$, M_{EN} étant la masse typique d'une étoile à neutrons (1,4 masse solaire).

   (En réalité, le rayon est plus proche de 10 km que la valeur ainsi trouvée, seule la densité centrale étant de l'ordre de celle de la matière atomique.)

Une quantité importante dans l'étude des étoiles à neutrons est ce que l'on appelle le moment d'inertie. Cette quantité intervient dans l'étude de la rotation d'un objet, en tant que paramètre déterminant la difficulté qu'il y a à modifier l'axe de rotation de celui-ci. Cette quantité est définie par la somme des valeur mr^2 de chacune des particules composant l'objet, où m est leur masse et r leur distance à l'axe de rotation de l'objet. Le moment d'inertie, noté I, d'un objet sphérique de rayon R est ainsi de la forme

$$I = xMR^2,$$

où x est une quantité numérique à déterminer. Pour une sphère de densité constante, on montre (exercice pour les courageux : le faire !) que $x = \frac{2}{5}$. Pour un objet astrophysique réaliste, x est d'autant plus petit que le profil de densité est piqué au centre (c'est-à-dire que la densité centrale est importante par rapport à la densité moyenne). La matière composant une étoile à neutrons est relativement difficile à comprimer, aussi son profil de densité est-il relativement doux. En conséquence, x est assez proche de la valeur de $\frac{2}{5}$ citée ci-dessus.

1. Calculer I pour une étoile à neutrons, en prenant une masse de 1,4 masse solaire et un rayon de 10 kilomètres.

2. Comparer la valeur trouvée au moment d'inertie de la Terre ($R = 6370$ km et $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg) et du Soleil (valeurs numériques données en introduction), en prenant pour l'un et pour l'autre $x = \frac{2}{5}$.

2.2 Rotation d'une étoile à neutrons

Lors de l'effondrement de la supernova, la rotation du cœur est considérablement augmentée : c'est le fameux effet du patineur qui tourne sur lui-même d'autant plus vite qu'il ramène ses bras contre son corps. Techniquement on dit qu'il y a conservation du moment cinétique, cette quantité étant proportionnelle au produit $I\Omega$, I est le moment d'inertie discuté plus haut et Ω la vitesse angulaire de l'objet. La masse du cœur de l'étoile est conservée, mais pas son rayon, qui diminue lors de l'effondrement, aussi I diminue-t-il fortement lors de celui-ci, et par voie de conséquence la vitesse de rotation augmente-t-elle pour compenser.

Faute d'autres données, on prendra un rayon initial de l'ordre du rayon solaire $R_\odot$ et un rayon final de l'ordre de 10 km, ainsi qu'une période de rotation $P = 2\pi/\Omega$ de l'ordre de celle du Soleil (28 jours).

1. Calculer la vitesse angulaire de rotation de l'étoile à neutron à sa formation.
2. En réalité, la vitesse angulaire de rotation de l'étoile est limitée par la force centrifuge : si l'étoile tourne vraiment trop vite, elle va perdre une partie de sa matière située à l'équateur. La vitesse de rotation maximale est ainsi donnée par la troisième loi de Kepler, à savoir

$$\Omega^2_{\rm max} = \frac{GM}{R^3}.$$

   Vérifier que cette vitesse n'est pas excessivement différente de celle ainsi trouvée.
3. Calculer la vitesse $R\Omega$ à laquelle se déplace la région équatoriale du fait de la rotation. Est-elle très différente de celle de la lumière ?

2.3 Champ magnétique

Une autre quantité conservée lors de l'effondrement du cœur est le flux magnétique Φ donné par

$$\Phi = BR^2,$$

où B est le champ magnétique.

1. En prenant un champ magnétique de 0,01 à 1 tesla pour une étoile massive très magnétisée, calculer le champ magnétique d'une étoile à neutrons.
2. Comparer la valeur trouvée à celle du champ magnétique terrestre (50 microteslas) et aux champs magnétiques les plus intenses que l'on sait fabriquer en laboratoire (100 teslas).

2.4 Ralentissement

Du fait de leur champ magnétique, la rotation des pulsars ralentit au cours du temps. Les pulsars jeunes sont ainsi dotés d'une vitesse de rotation plus élevée que les pulsars plus âgés. En pratique, on observe un lent allongement de la période de rotation P des pulsars, que l'on note $\dot{P}$. Les calculs indiquent que si le pulsar a suffisamment ralenti par rapport à sa naissance, alors la période et le ralentissement permettent de déterminer une valeur approchée de l'âge du pulsar selon la formule

$$\text{âge} \simeq \frac{1}{2}\frac{P}{\dot{P}}.$$

1. Le pulsar du Crabe situé au centre de la Nébuleuse du Crabe M1 a une période de 33 millisecondes et un ralentissement de $4{,}22 \cdot 10^{-13}$ s $\cdot$ s^{-1}. L'âge estimé de ce pulsar est-il compatible avec le fait qu'il soit issu de la supernova observée en extrême orient au matin du 4 juillet de l'an 1054 et dans les mois qui suivirent ?

2. La plupart des pulsars ralentissent bien plus lentement que le pulsar du Crabe. Par exemple, PSR J2317+1439 a une période de 3,45 millisecondes et un ralentissement de $2{,}4 \cdot 10^{-21}$ s·s^{-1}. L'estimation de son âge par la formule ci-dessus est-elle satisfaisante ? En serait-il de même avec un pulsar qui aurait une période de rotation dix fois plus grande et un ralentissement identique ?
3. L'énergie dissipée du fait du ralentissement d'un pulsar est de la forme

$$L_{\mathrm{ral}} = -I\Omega\dot{\Omega},$$

où I est le moment d'inertie, Ω la vitesse angulaire et $\dot{\Omega}$ sa variation. Cette quantité est d'ordinaire appelée luminosité de ralentissement, En terme de la période, cette relation se réécrit

$$L_{\mathrm{ral}} = 4\pi^2 I \frac{\dot{P}}{P^3}.$$

Calculer la puissance émise par le pulsar du Crabe. Comparer cette valeur à celle de la luminosité solaire.

2.5 Vérifications

Le pulsar du Crabe (PSR B0531+21) et PSR J0537-6910, situé dans le Grand Nuage de Magellan, sont respectivement dotés de période de rotation de 33 et 16 millisecondes.

1. Ces valeurs sont-elles compatibles avec les estimations précédentes ?
2. Même question pour un des pulsars les plus rapides connus, PSR B1937+21 (période de 1,5 milliseconde). Dans le courant des années 1990 l'annonce fut faite d'un pulsar de période 0,5 milliseconde dans le rémanent de la supernova SN 1987A dans le Grand Nuage de Magellan. L'émoi suscité par cette annonce, aujourd'hui démentie, était-il justifié ?
3. La perte d'énergie L_{ral} du pulsar est fonction de son champ magnétique. Les calculs indiquent que ralentissement et champ magnétique sont liés par la relation

$$L_{\mathrm{ral}} = -I\Omega\dot{\Omega} = \frac{8\pi}{3}\frac{B^2}{\mu_0}\frac{R^6\Omega^4}{c^3},$$

μ_0 étant une quantité appelée perméabilité du vide (valeur donnée en introduction). On peut réécrire la relation (en passant de la vitesse angulaire Ω à la période P),

$$B^2 = \mu_0 \frac{Ic^3}{R^6}\frac{3}{32\pi^3}P\dot{P}.$$

Calculer le champ magnétique du pulsar du Crabe. Vérifier que la valeur trouvée correspond à l'ordre de grandeur annoncé du champ magnétique.

3 Trous noirs

3.1 Taille physique d'un trou noir

Intuitivement, un trou noir est défini par le fait que la vitesse de libération d'un objet situé à sa surface (c'est-à-dire la vitesse qu'il faudrait lui conférer pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle de l'objet) est égale à celle de la lumière. Ceci se traduit par la relation

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{GM}{R},$$

soit

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$

1. Calculer le rayon d'un trou noir de masse solaire
2. Calculer le rayon du trou noir central de notre Galaxie, Sgr A* (3,5 millions de masses solaires)
3. Calculer le rayon du plus gros trou noir du voisinage galactique, celui de M87 (3,9 milliards de masses solaires)

3.2 Taille angulaire d'un trou noir

La taille angulaire d'un objet de rayon R situé à une distance d vaut

$$\theta = \frac{2R}{d}.$$

L'angle ainsi trouvé est exprimé en radians. Exprimé en secondes d'arc, l'angle vaut

$$\frac{\theta}{1''} \simeq 2{,}06 \cdot 10^5 \frac{2R}{d}.$$

Pour un trou noir, cette relation doit être légèrement modifiée : du fait de la déflexion de la lumière qu'il génère, sa taille angulaire apparaît plus grande selon la nouvelle loi

$$\theta_{\mathrm{TN}} = \frac{3\sqrt{3}R}{d},$$

ou, en exprimant à nouveau l'angle en secondes d'arc,

$$\frac{\theta_{\mathrm{TN}}}{1''} \simeq 2{,}06 \cdot 10^5 \frac{3\sqrt{3}R}{d}.$$

1. Calculer la taille angulaire du premier trou noir stellaire découvert, Cygnus X-1 (masse : 10 masses solaires, distance : 5 600 années-lumière)
2. Calculer la taille angulaire du trou noir central de notre galaxie (masse : 3,5 millions de masses solaires, distance : 8 kiloparsecs)
3. Calculer la taille angulaire du trou noir de M87 (masse : 3,9 milliards de masses solaires, distance : 16 megaparsecs)
4. Comparer les valeurs obtenues à celles de la taille angulaire d'une hypothétique bactérie (1 micron soit 10^{-6} mètre) ou la taille de l'empreinte de Neil Armstrong (30 cm) vues sur la Lune (distance : 380 000 km).

La finesse maximale des détails que l'on peut espérer distinguer avec un télescope dépend de la longueur d'onde λ de la lumière utilisée et du diamètre D du télescope selon la loi

$$\theta_{\mathrm{min}} = \frac{\lambda}{D},$$

où en exprimant à nouveau l'angle en secondes d'arc,

$$\frac{\theta_{\mathrm{min}}}{1''} = 2{,}06 \cdot 10^5 \frac{\lambda}{D}.$$

1. Calculer la résolution angulaire d'un télescope optique de prochaine génération ($D = 100\,\mathrm{m}$, $\lambda = 0,5\,\mu\mathrm{m}$)
2. Calculer la résolution angulaire d'un interféromètre radio à très longue base, réalisé à partir d'un ensemble de radiotélescopes dont on combine astucieusement les signaux, de façon à simuler un télescope dont le diamètre équivaut à la distance maximale entre les radiotélescopes ($D_{\mathrm{sim}} = 10\ 000\,\mathrm{km}$, $\lambda = 3$ mm).
3. Laquelle de ces deux techniques apparaît la plus prometteuse ? Quel type de trou noir est le plus accessible à l'observation directe ?

3.3 "Densité" équivalente d'un trou noir

Un trou noir est un objet essentiellement vide : toute matière qui y pénêtre est inéluctablement attirée vers le centre. On peut à défaut définir la densité de la matière qui permettrait de donner naissance à un trou noir de masse M donnée. La masse volumique de cette matière est alors de l'ordre de

$$\mu = \frac{4\pi}{3}\frac{M}{R^3},$$

où R est donné comme précédemment par

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$

1. Calculer les masses volumiques permettant de créer des trous noirs de trois, trois millions et trois milliards de masses solaires. Ce résultat est-il intuitif ?
2. Calculer le rayon d'un trou noir qui une masse comparable à celle de l'univers observable, soit environ $2{,}7 \cdot 10^{53}$ kg
3. Comparer le résultat trouvé à l'ordre de grandeur du rayon de l'univers observable, soit c/H_0, où H_0 est la constante de Hubble, qui est estimée à 72 $\mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$. Que remarque-t-on ? Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

3.4 La fusion de deux trous noirs

Un trou noir grossit au cours du temps du fait de la matière qu'il engloutit. Dans certains cas, on assiste à la fusion de deux trous noirs, par exemple quand ceux-ci sont issus de deux étoiles initialement en orbite l'une autour de l'autre, ou alors quand il s'agit des deux trous noirs centraux de deux galaxies qui ont fusionné.

Ce processus s'accompagne par une émission importante d'ondes gravitationnelles, sortes de rides de l'espace-temps produites par les mouvement des corps massifs. Quand les deux trous noirs qui fusionnent sont de masses M identiques, le processus émet une énergie de l'ordre de $E_{\mathrm{fus}} = Mc^2$, principalement lors de la phase de fusion proprement dite, c'est-à-dire quand la distance qui sépare les trous noirs est de l'ordre de leur taille. Lors de cette phase, les trous noirs ont une vitesse relative de l'ordre de la vitesse de la lumière. La durée de cette phase est égale au temps que met un trou noir pour parcourir la distance qui le sépare de son compagnon, soit sa propre taille. Cette durée vaut ainsi $t_{\mathrm{fus}} \sim R/c$, R étant le rayon des trous noirs.

1. Calculer la puissance émise par le processus, donnée par $L = E_{\mathrm{fus}}/t_{\mathrm{fus}}$. De quelle façon dépend-elle de la masse des trous noirs ?
2. Comparer la puissance trouvée avec la luminosité du Soleil (émise sous forme de rayonnement électromagnétique et non d'ondes gravitationnelles).
3. Comparer la puissance trouvée à la puissance émise dans le domaine électromagnétique de l'ensemble des étoiles de l'univers observable, soit dans les 10^{23} luminosités solaires. Conclusion ?

3.5 La fin des trous noirs

En 1974, Stephen Hawking montra que les trous noirs ne sont pas complètement noirs, mais émettent un très faible rayonnement. La longueur d'onde λ de ce rayonnement est de l'ordre du rayon du trou noir. La puissance émise sous forme de rayonnement électromagnétique par un objet de rayon R et de température T est donnée par

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

où σ est une quantité appelée constante de Stefan. La température est proportionnelle à la fréquence du rayonnement $\nu = c/\lambda$, qui ici est inversement proportionnelle au rayon du trou noir. Au final, on a

$$L \propto \frac{1}{R^2} \propto \frac{1}{M^2}.$$

L'énergie rayonnée par le trou noir s'accompagne d'une diminution de sa masse en un temps caractéristique t_{ev} donné par

$$\frac{M}{t_{\text{ev}}} \propto L.$$

Au final, le temps d'évaporation d'un trou noir de masse M est proportionnel à

$$t_{\text{ev}} \propto \frac{1}{M^3}.$$

1. Sachant d'après ce qui précède que le temps d'évaporation ne dépend que de la masse du trou noir et des constantes fondamentales c, G et h déterminer en négligeant tout facteur numérique la formule donnant le temps d'évaporation.
2. Calculer le temps d'évaporation pour un trou noir d'une masse solaire.
3. Comparer ce temps à l'âge de l'univers (13,7 milliards d'années). Ce processus d'évaporation joue-t-il un rôle aujourd'hui ?
4. Calculer la masse maximale d'un trou noir pour que celui-ci ait le temps de s'évaporer en un temps de l'ordre de l'âge de l'univers. Comparer cette masse à celle d'un trou noir stellaire (un peu plus d'une masse solaire au minimum).
5. Calculer la masse volumique que l'on doit atteindre pour produire un tel trou noir. À quelle époque de tels objets seraient-ils susceptibles de se former ?