

Théorie quantique et échelles macroscopiques

Jean-Marc Lévy-Leblond*

« Pourquoi ma connaissance est-elle bornée ? Ma taille ? Quelle raison a eue la nature de me la donner telle, et de choisir ce nombre plutôt qu'un autre, dans l'infinité desquels il n'y a pas plus de raison de choisir l'un que l'autre ? »
Pascal, *Pensées*

Un paradoxe hante la physique aujourd'hui et obère son enseignement : c'est que la physique du monde quotidien, de l'échelle macroscopique, est au fond bien plus complexe que celle du microscopique et du mégascopique. Un atome, une étoile à neutrons et même l'Univers entier sont plus simples qu'une goutte d'eau, un éclat de verre ou un tas de sable. Aussi n'est-il guère aisé de mettre en jeu les concepts de la physique pour expliquer de façon un tant soit peu complète et convaincante les phénomènes les plus ordinaires.

Je voudrais pourtant montrer ici que des idées physiques essentielles, portant sur la nature profonde des choses, peuvent être exprimées de façon simple, et venir éclairer des aspects majeurs du monde à notre échelle. Soit donc la question suivante : « Qu'est-ce qui détermine la taille humaine — ou, plus généralement, la taille des êtres vivants sur notre planète (ou une autre) ? ». Contrairement à ce que l'on pourrait croire, la biologie, si elle est évidemment requise (par définition...) pour comprendre la nature et le fonctionnement des organismes vivants, ne joue pas un rôle crucial dans cette affaire. Des considérations physiques très générales vont se montrer suffisantes pour déterminer leur échelle, ou en tout cas, plus précisément, l'ordre de grandeur des tailles maximales des êtres vivants (plus précisément encore, des animaux terrestres).

1. Évaluations et notations

“Ordre de grandeur”, avons-nous dit. C'est qu'en effet les arguments que nous allons développer ne nous fourniront de résultats quantitatifs qu'“à une constante près”. Mais, et c'est là la pierre angulaire de la physique qualitative, « Dans (presque) toute expression physique, les constantes sans dimension sont de l'ordre de l'unité... », selon le “Principe numéro Zéro de la physique” de J. A. Wheeler — à condition de préciser ses conditions de validité en rajoutant « ... si les grandeurs physiques sont correctement choisies. » Il est fort commode d'introduire une notation qui prenne en charge cette idée. Aussi noterons-nous l'égalité à une constante près (constante numérique sans dimension et de l'ordre de l'unité donc) par le signe \approx , et les inégalités à une constante près par les signes \prec et \succ . À titre d'exemple, si nous considérons un objet de taille caractéristique l , sans plus de précisions sur sa forme, nous pourrions écrire son volume $v \approx l^3$.

Nous allons donc considérer un être vivant à la surface d'une planète, tous deux constitués d'une matière que nous traiterons de façon indifférenciée, en la considérant globalement comme composée de protons, et en nombre égal,

* Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex

d'électrons (nous négligeons donc les neutrons ; on pourrait aussi les prendre en compte en affectant aux protons une "masse effective" qui tienne compte de la composition nucléonique réelle de la matière). On peut aussi dire que nous considérons la matière comme faite d'une seule sorte d'atomes, les plus simples possibles. Cette hypothèse est évidemment intenable pour la chimie (géo- et bio-), qui repose tout entière sur le jeu subtil de diverses sortes d'atomes. Elle nous suffira cependant. Fixons alors nos notations concernant la taille, la masse et le nombre d'atomes des trois objets de notre analyse (la planète, l'animal, l'atome) par le tableau suivant :

	Nombre d'atomes	Masse	Taille
Atome	1	μ	a
Animal	n	$m = n\mu$	$l \approx n^{1/3} a$
Planète	N	$M = N\mu$	$L \approx N^{1/3} a$

Les "tailles" sont à entendre comme donnant l'ordre de grandeur des dimensions géométriques des objets, dont nous supposons qu'elles ne diffèrent pas trop dans les différentes directions. Cela va de soi pour les atomes et la planète, un peu moins pour les animaux ; mais nous considérerons les mille-pattes et les girafes comme des cas particuliers... Les expressions des masses de la planète et de l'animal en fonction de celle des atomes — c'est-à-dire ici la masse nucléonique — sont évidentes. Celles qui lient les tailles résultent de l'hypothèse que nous avons affaire à de la matière solide ordinaire, où les distances interatomiques sont comparables à la taille des atomes — mettons, de l'ordre de l'angström. Le volume d'un système quelconque s'obtient alors simplement en multipliant le volume élémentaire occupé par un atome, soit a^3 , par le nombre d'atomes. Ainsi, le volume de la Terre, par exemple, est simplement : $V \approx Na^3$, mais aussi (...à une constante près) le cube de sa taille : $V \approx L^3$. D'où les relations de la troisième colonne ci-dessus.

Pour évaluer, à partir des grandeurs caractéristiques des atomes, celles de la planète et de la vie, notre raisonnement va reposer sur le jeu des seules forces gravitationnelles et électromagnétiques. Les premières sont caractérisées par la constante de Newton, soit G . Les secondes, par la charge électrique élémentaire q_e , dont le carré définit la constante de couplage électromagnétique, mesurant l'intensité des interactions électromagnétiques comme la constante de Newton mesure celle des interactions gravitationnelles ; c'est la combinaison que l'on note usuellement $e^2 := q_e^2 / 4\pi\epsilon_0$ (dans le système SI) qui joue ce rôle. Il est commode pour la suite de définir les énergies de liaison caractéristiques de deux atomes voisins dues aux interactions gravitationnelles et électromagnétiques respectivement :

$$E_{\text{gr}} \approx \frac{G\mu^2}{a} \qquad E_{\text{em}} = \frac{e^2}{a}.$$

Si la première expression est à peu près évidente, la seconde l'est moins. De fait, les atomes sont neutres, et leur liaison ne peut se calculer par une formule coulombienne banale. Il n'en demeure pas moins qu'ils sont en général liés, nous le savons d'expérience (molécules, cristaux), et que cette liaison est d'origine électromagnétique, donc régie par la constante e^2 ; l'analyse dimensionnelle suffit alors à nous donner la seule expression possible pour l'énergie E_{em} en terme de la constante de couplage e^2 et de la distance interatomique a . [Bien entendu, c'est en

dernière analyse la théorie quantique qui détermine à la fois E_{em} et a , et confirme leur relation ; nous y reviendrons plus bas]. L'énergie électromagnétique, de l'ordre de l'électron-volt, est, comme on le sait, bien plus grande que l'énergie gravitationnelle, ce qui exprime la domination des forces électromagnétiques au niveau atomique. On a, en vérité :

$$\frac{E_{em}}{E_{gr}} = \frac{e^2}{G\mu^2} \cong 10^{36}.$$

Ce nombre, qui ne dépend que des valeurs de quelques constantes fondamentales, va jouer un rôle déterminant.

2. La planète

Qu'est-ce que la vie ? Cette question, qui donne son titre à un ouvrage célèbre¹, précurseur de la biochimie moderne, nous y répondrons ici dans les termes le plus élémentaires qui soient, en ne requérant qu'une condition nécessaire à l'existence de la vie — telle que nous la connaissons sur Terre² :

Un être vivant, forme d'organisation autonome et temporaire de la matière, doit être susceptible d'échanger de la matière avec son environnement, à la fois solide (croissance, nourriture, reproduction) et gazeux (respiration, métabolisme).

Cette simple exigence exerce, nous allons le voir, une contrainte sévère sur la taille d'une planète susceptible d'abriter la vie, au point d'en déterminer l'ordre de grandeur.

En tout premier lieu, la possibilité d'échanges de matière suppose que la cohésion de la matière soit principalement assurée par les forces électromagnétiques, et qu'elles dominent les forces gravitationnelles. Car le coût énergétique de la rupture d'un morceau de matière ne dépend que des liaisons atomiques ou moléculaires rompues le long de la surface de rupture, et non pas de la taille globale du système. Pour le dire autrement, il est aussi facile (énergétiquement parlant) de casser un bâton de craie usé que neuf — ou, pour en venir à la vie, de laper une gorgée d'eau dans une flaque ou dans un lac. Les forces électromagnétiques ont bien cette propriété, dite de "saturation", que l'énergie de liaison d'un système de N particules est linéaire en N , ou encore que l'énergie de liaison par atome est indépendante de la taille du système (elle est toujours de l'ordre de l'énergie caractéristique E_{em} — c'est-à-dire de quelques électron-volts). Cette propriété résulte essentiellement du jeu des subtiles compensations entre les attractions et répulsions électrostatiques qui jouent dans la matière. Les particules ayant des charges de signe opposé (noyaux et électrons) s'y répartissent uniformément (toute accumulation de charges non compensées conduisant à une répulsion locale) ce qui donne naissance à un effet d'écran mutuel : malgré leur longue portée (potentiel en $1/r$), les forces électrostatiques équivalent à des forces effectives à courte portée. Tout se passe ainsi comme si chaque atome n'interagissait qu'avec ses plus proches voisins ; l'énergie de liaison totale se réduit à la somme des énergies de liaison de chaque atome avec son environnement

1. Erwin Schrödinger, *Qu'est-ce que la vie ?*, Seuil, "Points-sciences", 1993.

2. C'est dire que nous nous en tenons à un point de vue conservateur, et ne prenons pas en compte, faute d'hypothèses à la fois raisonnables et spécifiques, la possible existence de formes de vie exotiques, telles que la science-fiction en a décrites, cristaux conscients ou nuages interstellaires pensants (voir, pour un traitement aussi scientifique que possible d'une telle idée, le roman du grand et iconoclaste astrophysicien Fred Hoyle, *Le nuage noir*).

immédiat, qui est encore donnée typiquement par E_{em} . Pour l'ensemble de la planète, on peut ainsi estimer son énergie de liaison électromagnétique suivant :

$$U_{\text{em}} \approx NE_{\text{em}}.$$

Il en va tout autrement pour les forces de gravitation. Bien que beaucoup plus faibles que les forces électromagnétiques, elles sont bien plus têtues, car universellement attractives. Aucune compensation ne joue, et l'énergie est donc celle de tous les couples d'atomes, au nombre de $\frac{1}{2}N(N-1) \approx N^2$; compte tenu de ce que la distance moyenne entre deux atomes est évidemment de l'ordre de la taille de la planète, soit L , l'énergie de liaison gravitationnelle (que l'on pourrait aussi bien évaluer comme l'énergie d'autointeraction de la masse totale $M = N\mu$, de l'ordre de GM^2/L) s'écrit :

$$U_{\text{gr}} \approx N^2 \frac{G\mu^2}{L} \approx N^2 \frac{G\mu^2}{N^{1/3}a} \approx N^{5/3}E_{\text{gr}}.$$

Comme le montre l'exposant $5/3$, les forces de gravitation ne sont pas saturées, et l'énergie de liaison par atome croît (comme la puissance $2/3$ de leur nombre), ce qui rend de plus en plus compact et de plus en plus liés des morceaux de matière de plus en plus gros. Des systèmes dominés par les forces de gravitation ont un intérêt énergétique majeur à rester liés et ne se laissent pas mettre en pièces³. Une planète ne permettra donc à sa matière de s'organiser en structures séparées complexes et mobiles, échangeant des atomes sans dépense énergétique prohibitive, que si sa cohésion est essentiellement d'origine électromagnétique, les forces de gravitation ne jouant qu'un rôle mineur. La condition requise est $U_{\text{em}} \succ U_{\text{gr}}$, soit :

$$NE_{\text{em}} \succ N^{5/3}E_{\text{gr}}.$$

Définissant le "nombre planétaire" caractéristique par :

$$N_p := \left(\frac{E_{\text{em}}}{E_{\text{gr}}} \right)^{3/2} = \left(\frac{e^2}{G\mu^2} \right)^{3/2},$$

nous aboutissons donc à la conclusion qu'une planète, pour abriter la vie, ne doit pas être trop grosse :

$$N \prec N_p.$$

Mais il faut aussi que puisse fonctionner le métabolisme de l'animal, donc ses échanges gazeux avec l'atmosphère — et d'abord qu'existe une telle atmosphère ! Comme on le sait, ceci exige que la planète soit assez lourde pour retenir ses matériaux gazeux ; la "vitesse de libération" doit y être supérieure à la vitesse moyenne des atomes, de façon qu'ils n'échappent pas à l'attraction terrestre. Or l'énergie cinétique moyenne des atomes, que leur confèrent les réactions chimiques qui les produisent, est comparable à l'énergie atomique caractéristique E_{em} . Celle-ci doit être inférieure à la profondeur du puits de potentiel gravitationnel pour l'atome à la surface de la planète, soit

3. Précisons encore la spécificité des forces saturées. Supposons qu'un système de N particules ait son énergie de liaison donnée par $U(N) \approx N^\alpha E$. Alors, la différence énergétique entre deux systèmes séparés, de N particules chacun, et le système composé des $2N$ particules est

$\Delta U \approx U(2N) - 2U(N) = (2^\alpha - 2)N^\alpha E$. On voit que si cette différence est nulle (à l'ordre N) pour des forces saturées ($\alpha = 1$), il n'en va plus de même pour des forces non-saturées ($\alpha > 1$), de sorte que, dans son état le plus stable, le système est alors nécessairement ramassé en un seul morceau. Seule la saturation des forces permet, sans coût énergétique rédhibitoire, la séparation effective en plusieurs sous-systèmes.

$$E_{\text{em}} < \frac{GM\mu}{L} \approx \frac{NG\mu^2}{N^{1/3}a} = N^{2/3}E_{\text{gr}}.$$

D'où la nouvelle condition, exactement réciproque de la précédente⁴ :

$$N > N_p.$$

Nous en concluons que la vie ne peut exister que sur une planète dont la taille est d'un ordre de grandeur bien défini :

$$N \approx N_p.$$

Passant aux valeurs numériques, on obtient, pour une planète habitable typique :

$$N_p \approx 10^{54}, \quad M_p \approx 10^{27} \text{ kg}, \quad L_p \approx 10^8 \text{ m}.$$

Ces ordres de grandeur sont bien ceux d'une "grosse" planète, intermédiaire entre la Terre et Jupiter. Compte-tenu de la brutalité de nos approximations, en particulier du complet "oubli" de la composition atomique réelle de la matière, et de l'incertitude quant aux constantes sans dimension (de l'ordre de l'unité selon le Principe numéro Zéro, certes, mais le produit de plusieurs nombres de cette ordre de grandeur peut fort bien lui échapper !), ce résultat est fort satisfaisant.

3. L'animal

Nous ne tenons compte, pour caractériser un animal vivant sur notre planète, que d'une condition mécanique minimale :

Un animal doit pouvoir se déplacer sans risques à la surface de la planète ; il doit être assez solide pour ne pas se briser lors d'une chute.

En d'autres termes, l'énergie cinétique acquise lors d'une chute dans le champ de gravité à la surface de la planète (l'animal tombant de sa propre hauteur, soit l), doit rester largement inférieure à l'énergie nécessaire pour briser son corps. Dans le cas simple et sans appel où ce corps est cassé en deux parties, l'énergie de séparation est celle du nombre de liaisons atomiques rompues, soit en gros le nombre n' d'atomes dans une section plane du corps. Ce nombre peut être évalué en divisant l'aire caractéristique d'une telle section, soit l^2 , par l'aire du domaine occupé par chaque atome, soit a^2 :

$$n' \approx \frac{l^2}{a^2} \approx n^{2/3},$$

de sorte que l'énergie de rupture s'écrit :

$$E_{\text{rup}} \approx n^{2/3}E_{\text{em}}.$$

L'énergie de chute, quant à elle, n'est autre que l'énergie potentielle du corps dans le champ de pesanteur de la planète quant il se tient à une hauteur l au-dessus de la surface. Or l'accélération de la pesanteur à la surface de la planète vaut :

4. La même condition peut être obtenue par un argument un peu moins grossier, faisant intervenir la température à la surface de la planète. Il faut raisonner en deux temps :

1) Pour qu'une (bio)chimie active mais nondestructrice puisse se dérouler, la température ne doit pas être trop basse (le facteur de Boltzmann inhibant les réactions chimiques), ni trop haute (déstabilisant les fragiles molécules organiques). L'énergie thermique moyenne doit donc être de

l'ordre de grandeur de l'énergie atomique caractéristique : $kT \approx E_{\text{em}}$

2) pour que la pesanteur retienne l'atmosphère, l'énergie cinétique moyenne des atomes, donnée par leur énergie d'agitation thermique, doit rester inférieure à la profondeur du puits de potentiel gravitationnel : $kT < GM\mu/L$.

On retrouve bien le même résultat.

$$g \approx \frac{GM}{L^2} \approx N^{1/3} \frac{G\mu}{a^2},$$

L'énergie de chute s'écrit alors :

$$E_{\text{chu}} \approx mgl \approx N^{1/3} n^{4/3} \frac{G\mu^2}{a} \approx N^{1/3} n^{4/3} E_{\text{gr}}.$$

La condition assurant l'intégrité physique du corps de l'animal lors d'une chute, soit $E_{\text{chu}} \prec E_{\text{rup}}$, devient alors :

$$N^{1/3} n^{4/3} E_{\text{gr}} \prec n^{2/3} E_{\text{em}},$$

ou encore :

$$n^{2/3} \prec N^{-1/3} N_p^{2/3}.$$

Il est logique, en effet, que la limite supérieure pour la taille d'un animal soit d'autant plus basse que la taille de la planète est forte, puisque la pesanteur y est d'autant plus intense, et les conséquences d'une chute d'autant plus graves. Mais la taille d'une planète habitée n'est pas quelconque, et le nombre d'atomes y est justement donné par $N \approx N_p$; nous en arrivons ainsi à notre résultat essentiel :

$$n \prec N_p^{1/2}.$$

4. L'échelle humaine et le nombre d'Avogadro

Il existe donc une taille maximale pour la vie animale. Le nombre d'atomes correspondant s'exprime simplement en terme des constantes fondamentales :

$$n_0 = \left(\frac{e^2}{G\mu^2} \right)^{3/4}.$$

La masse correspondante est:

$$m_0 = \mu \left(\frac{e^2}{G\mu^2} \right)^{3/4}$$

et la taille :

$$l_0 = a \left(\frac{e^2}{G\mu^2} \right)^{1/4}.$$

Les valeurs numériques de ces grandeurs sont alors :

$$n_0 \approx 10^{27}, \quad m_0 \approx 1 \text{ kg}, \quad l_0 \approx 10 \text{ cm}.$$

Ici encore, eu égard à la simplicité de nos arguments, ce sont là des ordres de grandeur plus que satisfaisants. Il est clair que des estimations plus raffinées pourraient sans mal induire un facteur 10 à 100 sur l'échelle de taille.

Il existe naturellement un moyen de dépasser la limitation imposée par le critère de résistance aux chutes — c'est de ne pas pouvoir tomber ! Ceci peut se faire, pour des animaux terrestres, en retournant à l'eau, et en jouant la poussée d'Archimède contre la gravité de Newton. Aussi ne doit-on pas être surpris que les plus grands et plus lourds animaux ayant jamais existé soient les cétacés géants. Une autre façon de pallier le risque de chute est de ne pas se déplacer ! Un être vivant fixé (sur notre planète, ce sont les plantes qui sont immobiles, mais ailleurs ?) n'est pas assujéti à la limitation de taille que nous avons mise en évidence — d'où les séquoias....

Admettons que l'intelligence ne puisse apparaître que dans une espèce animale dont la taille est voisine du maximum autorisé (sans doute à cause de la complexité fonctionnelle qu'autorise et peut-être que demande une grande taille ; mais cela mériterait discussion !). Il en résulte alors que les grandeurs caractéristiques évaluées ci-dessus définissent l'échelle humaine même. Du coup, le nombre d'atomes n_0 , qui caractérise un morceau de matière à notre échelle n'est autre qu'une estimation du nombre d'Avogadro (à quelques puissances de 10 près, dues à la fois à la grossièreté de nos approximations — et à sa définition historique particulière via le système CGS : si la mole avait été définie par rapport au kilogramme plutôt qu'au gramme, le nombre d'Avogadro serait de 6×10^{26}) ! Ainsi, le nombre d'Avogadro, loin d'avoir une valeur numérique arbitraire, liée à une convention arbitraire, est-il en réalité déterminé par les constantes fondamentales de la physique, et plus spécifiquement, par le rapport des intensités des forces électromagnétiques et gravitationnelles.

On peut encore présenter ces résultats d'une façon particulièrement frappante, en réalisant que les grandeurs caractéristiques de l'échelle humaine, selon les estimations obtenues ici, correspondent tout juste à la moyenne géométrique entre les grandeurs atomiques et planétaires. En d'autres termes, et de façon hautement symbolique :

$$\text{Homme} = \sqrt{\text{Atome} \times \text{Planète}} .$$

Nous avons donc répondu à la question de Pascal qui figure en épigraphe de cet article — au moins quant à son interrogation sur la taille humaine, qui se trouve ainsi très précisément à mi-chemin entre les « deux infinis » de ce passage célèbre.

5. Et la quantique, dans tout ça ?

Il pourrait sembler étrange que nous ayons pu obtenir tous ces résultats sans faire appel à la physique quantique qui, après tout, régit les phénomènes atomiques sur lesquels nous nous sommes appuyés. De fait, les idées quantiques *sont* présentes, mais dissimulées, au cœur même de notre argumentation. Car c'est bien la théorie quantique qui détermine l'échelle atomique, tant en énergie qu'en taille. On a en effet :

$$a \approx \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (\text{“rayon de Bohr”})$$

et

$$E_{\text{em}} \approx \frac{me^4}{\hbar^2} \quad (\text{“Rydberg”})$$

(où la constante quantique \hbar est redéfinie à partir de la constante de Planck h par $\hbar = h/2\pi$, de façon à rendre pertinent le “Principe numéro Zéro de la physique”⁵).

Ainsi obtenons-nous une expression absolue de l'échelle macroscopique — c'est-à-dire de la taille humaine ! — en termes des seules constantes fondamentales :

$$l_0 \approx \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \left(\frac{e^2}{G\mu^2} \right)^{1/4}$$

Il suffit d'écrire cette expression sous sa forme brute $l_0 \approx \hbar^2 e^{-3/2} G^{-1/4} \mu^{-3/2}$ pour prendre conscience du caractère hautement non-trivial de ce résultat !

Mais la théorie quantique joue ici un rôle encore plus profond. Car c'est elle qui assure et explique la saturation des forces coulombiennes, condition sans laquelle

5. Voir Jean-Marc Lévy-Leblond & Françoise Balibar, *Quantique (Rudiments)*, Masson, 1997 ; chapitre 1, « Le domaine quantique ».

tout ce raisonnement serait dépourvu de fondement. Il est impossible ici de détailler cette question, qui reste aujourd'hui tributaire d'arguments hautement techniques⁶. Contentons-nous de dire que le caractère fermionique des électrons y joue un rôle fondamental, au point que l'on peut affirmer que le principe d'exclusion de Pauli est le garant essentiel de la stabilité de notre monde⁷.

6 . Pour une introduction assez élémentaire, mais plus détaillée, au rôle du principe de Pauli dans la nature de la matière ordinaire, voir Jean-Marc Lévy-Leblond & Françoise Balibar, *Quantique (Rudiments)*, Masson, 1997 ; chapitre 7, « Quantons identiques », en particulier pp. 423-431. Pour un traitement toujours synthétique, mais plus précis et comportant les références aux travaux originaux, voir Jean-Marc Lévy-Leblond, « Quantum Phenomena at Large », in *Advances in Quantum Phenomena*, E. Beltrametti & J.-M. Lévy-Leblond eds, Plenum Press, 1995 (pp. 281-295).

7. En l'absence du principe de Pauli, l'énergie d'un système de N particules régies par les forces coulombiennes voit son énergie varier comme la puissance $5/3$ de N . Les considérations de la note 4 montrent alors qu'un morceau de matière de quelques kilogrammes (notre corps, par exemple), si le principe de Pauli était brutalement abrogé, s'effondrerait sur lui-même jusqu'à occuper un volume plus petit que celui d'un noyau atomique, en libérant une énergie équivalente à celle de plusieurs dizaines de milliards de gigatonnes de TNT