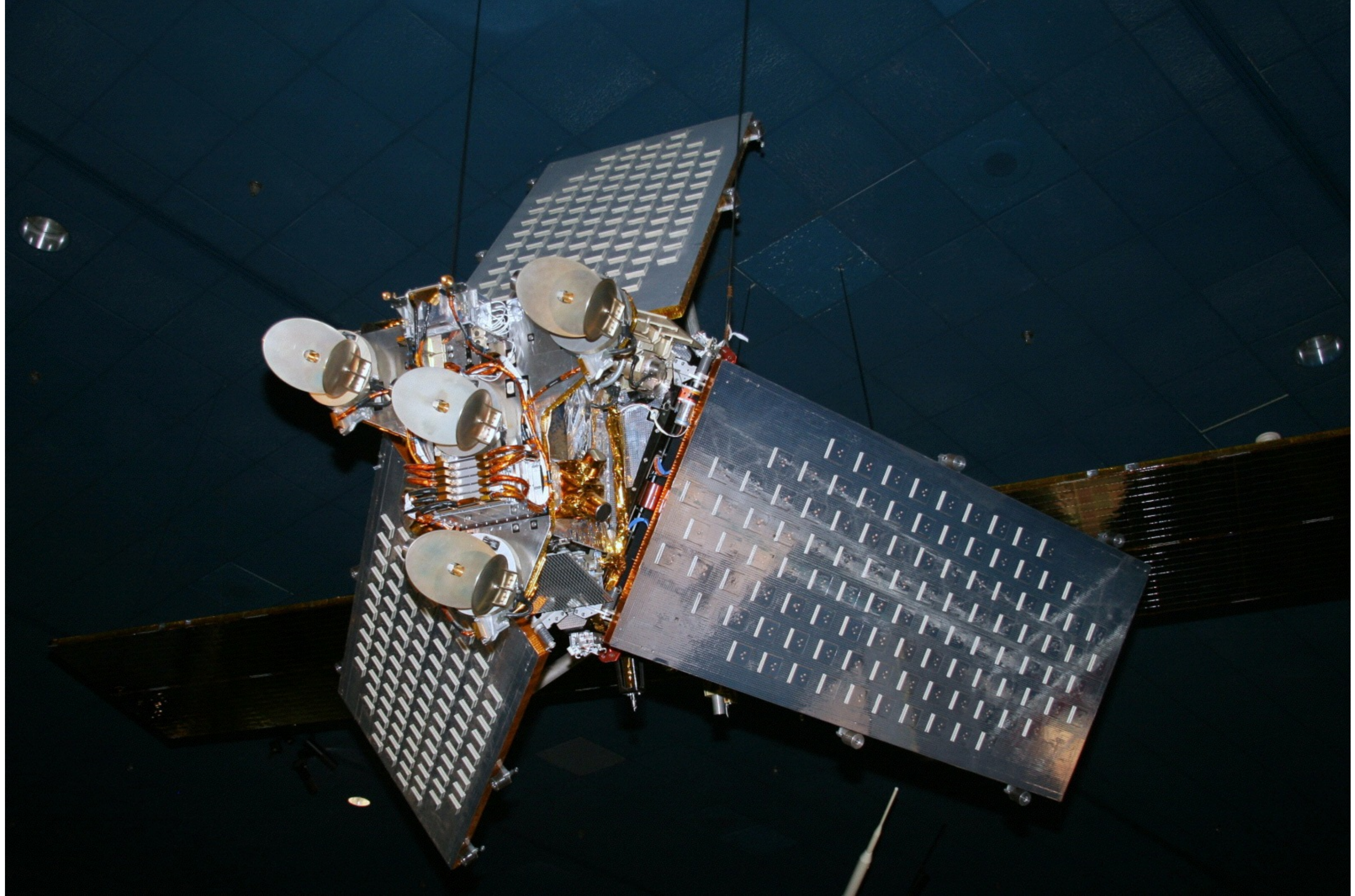


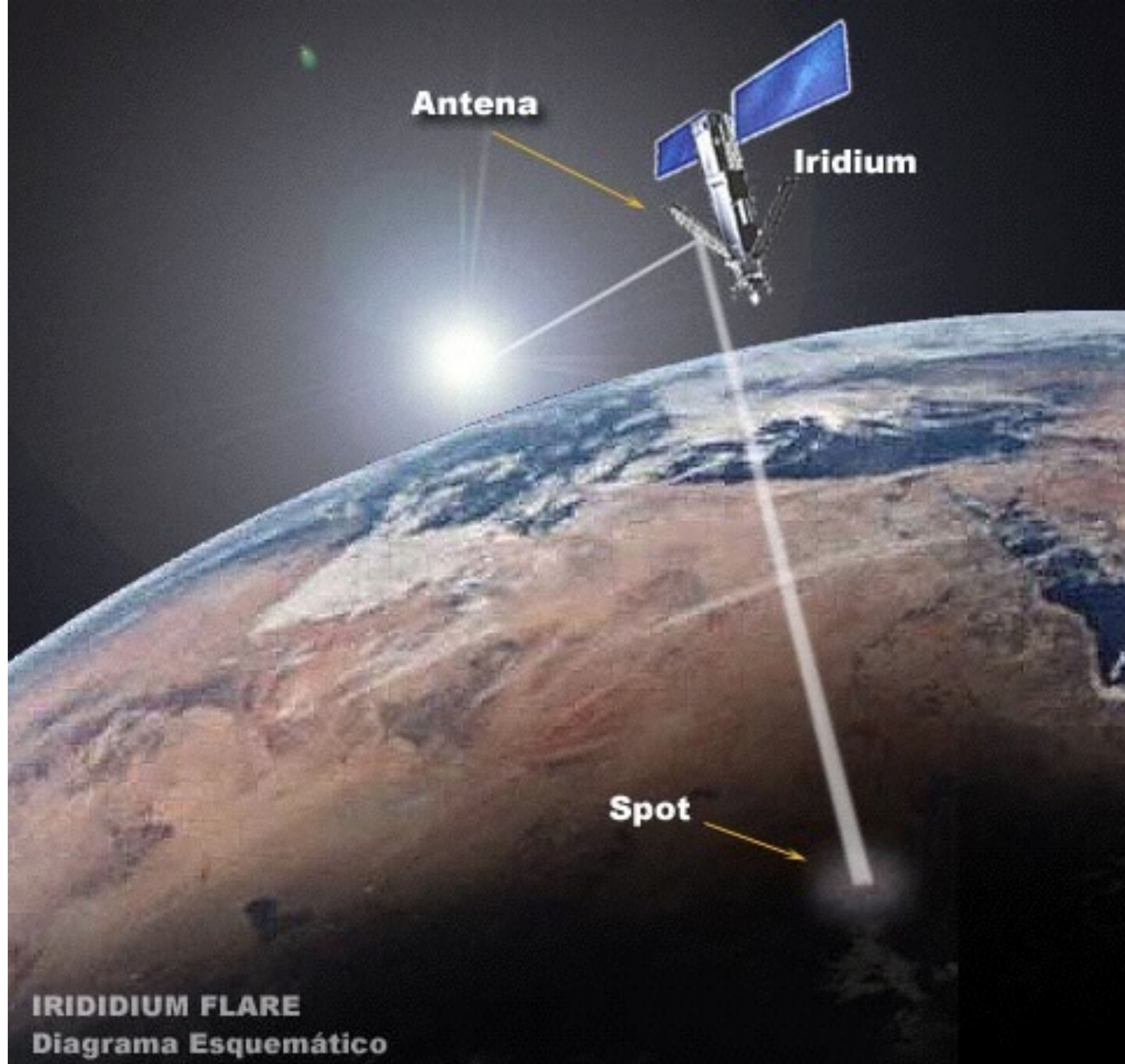
# De l'harmonie au chaos

Aurélien Alvarez









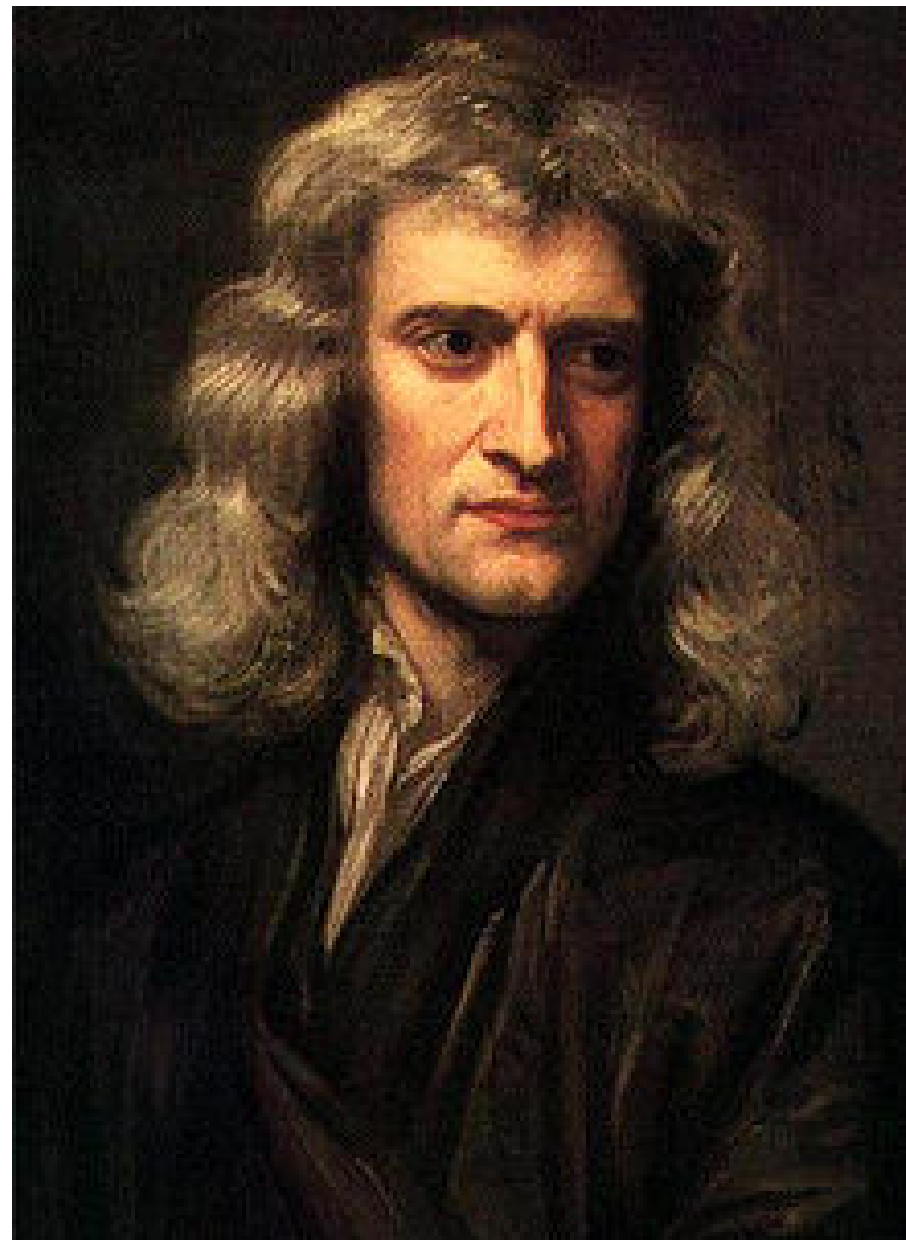
**IRIDIUM FLARE**  
**Diagrama Esquemático**  
**Apolo11.com**







## 1666 : *annus mirabilis* de Newton (1643-1727)



- Les forces qui animent le monde sont universelles, partout de même nature, que ce soit lors du mouvement de la Lune ou de la chute d'une pomme.
- Le *calcul des fluxions* est en train de naître : un outil mathématique merveilleux capable de prévoir l'avenir... Ce calcul infinitésimal de Leibniz-Newton révolutionne la Science.

*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, 1687.

# Un monde harmonieux et prévisible

- Le monde de Newton est hérité de celui des Anciens : le paradigme est le mouvement périodique. Le monde est fait de cycles qui se superposent et qui fascinent les mathématiciens depuis toujours (Fourier n'est pas le premier à vouloir décomposer les cycles en cycles élémentaires!).
- Les mouvements, après une courte période de transition, finissent par se stabiliser, soit en s'arrêtant, soit en oscillant périodiquement.
- Triomphe de l'*Analyse mathématique* au XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècle.
- Le Verrier découvre Neptune par le calcul différentiel, « du bout de sa plume », comme dira Arago.
- L'optimisme est grand, on résout des équations différentielles à tour de bras et on invente de nouvelles fonctions pour les étudier.

## Le déterminisme selon Laplace (1749-1827)



« Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. »

*Essai philosophique sur les probabilités, 1814.*







## Un peu de modestie avec Poincaré (1854-1912)



- Théorie qualitative des solutions d'une équation différentielle sans avoir besoin de la résoudre.
- Le mythe des mouvements cycliques harmonieux semblent se confirmer avec les « petits systèmes », à deux degrés de liberté : les mouvements finissent par se stabiliser sur des cycles.

*Sur les courbes définies par des équations différentielles, 1881.*



## Cependant... les choses se compliquent

- Poincaré rencontre dans des systèmes plus importants des phénomènes dynamiques d'une complexité extrême dont le comportement semble erratique, totalement imprévisible et sur lesquels il ne sait pas trop quoi dire...
- « On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien de plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de la Dynamique. »

*Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1893.*



## Un exemple météorologique

« Pourquoi les météorologistes ont-ils tant de peine à prédire le temps avec quelque certitude ? [...] Nous voyons que les grandes perturbations se produisent généralement dans les régions où l'atmosphère est en équilibre instable. Les météorologistes voient bien que cet équilibre est instable, qu'un cyclone va naître quelque part ; mais où, ils sont hors d'état de le dire ; **un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là, et il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées.** Si on avait connu ce dixième de degré, on aurait pu le savoir d'avance, mais les observations n'étaient ni assez serrées, ni assez précises, et c'est pour cela que tout semble dû à l'intervention du hasard. Ici encore nous retrouvons le même contraste entre une cause minime, inappréciable pour l'observateur, et des effets considérables, qui sont quelquefois d'épouvantables désastres. »

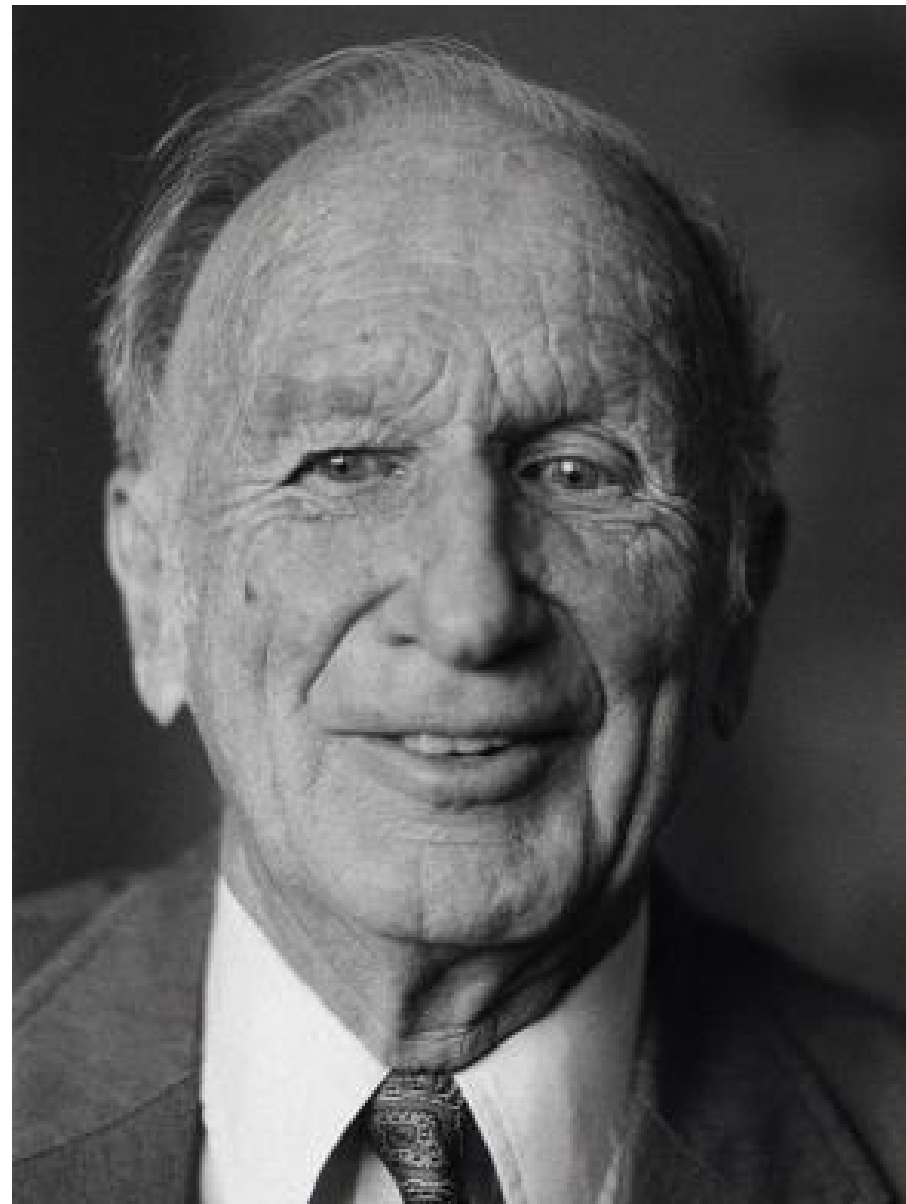
*La Science et la Méthode*, 1908.



QUELQUE 60 ANS PLUS TARD...



# L'atmosphère de Lorenz (1917-2008)

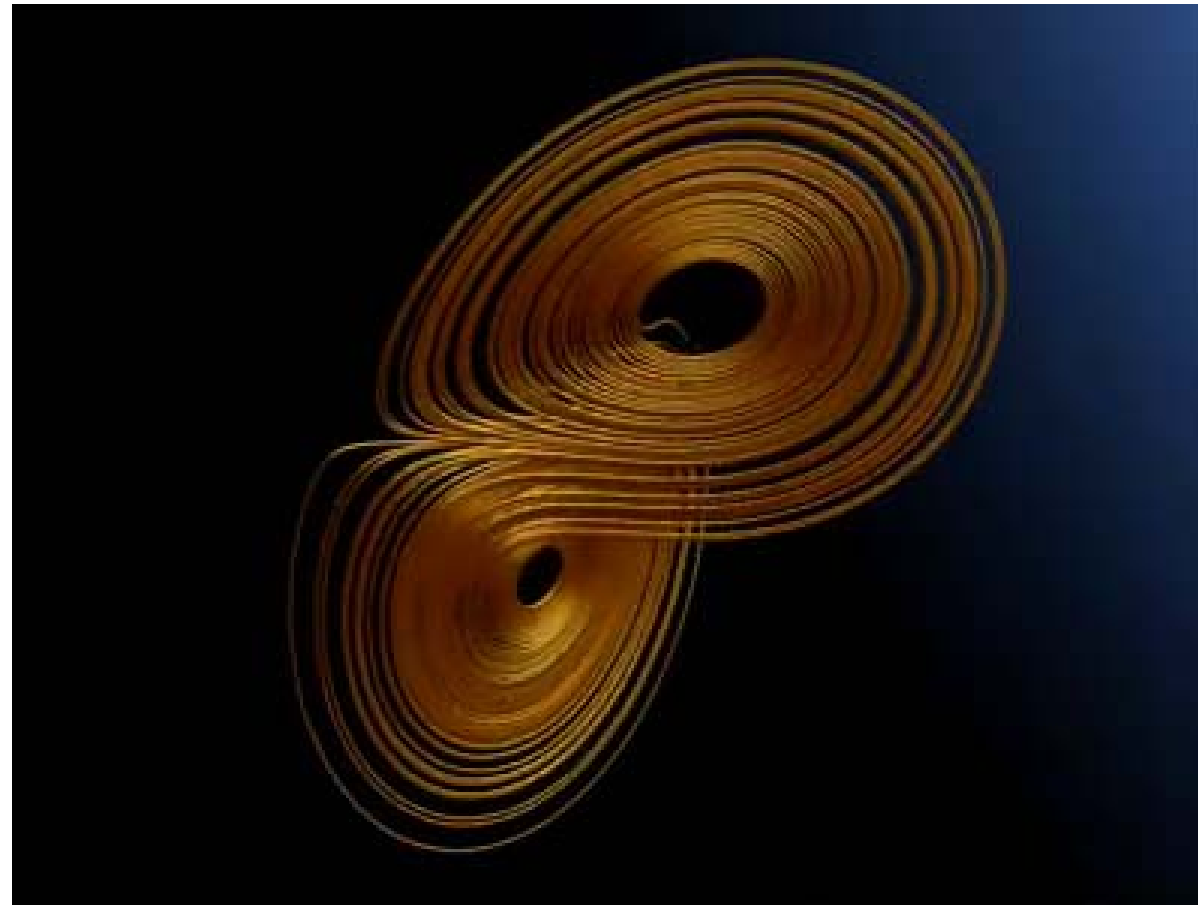


- Les phénomènes de météorologie (notamment le couplage de l'atmosphère avec l'océan) sont bien décrits par les équations de Navier-Stokes... qui sont d'une complexité inextricable.
- Lorenz étudie une situation physique particulière : le modèle de convection de Rayleigh-Bénard. Il caricature ses équations pour obtenir un modèle mathématique d'une illusoire étonnante simplicité, en trois dimensions.

*Deterministic Nonperiodic Flow, 1963.*



# Le système dynamique de Lorenz



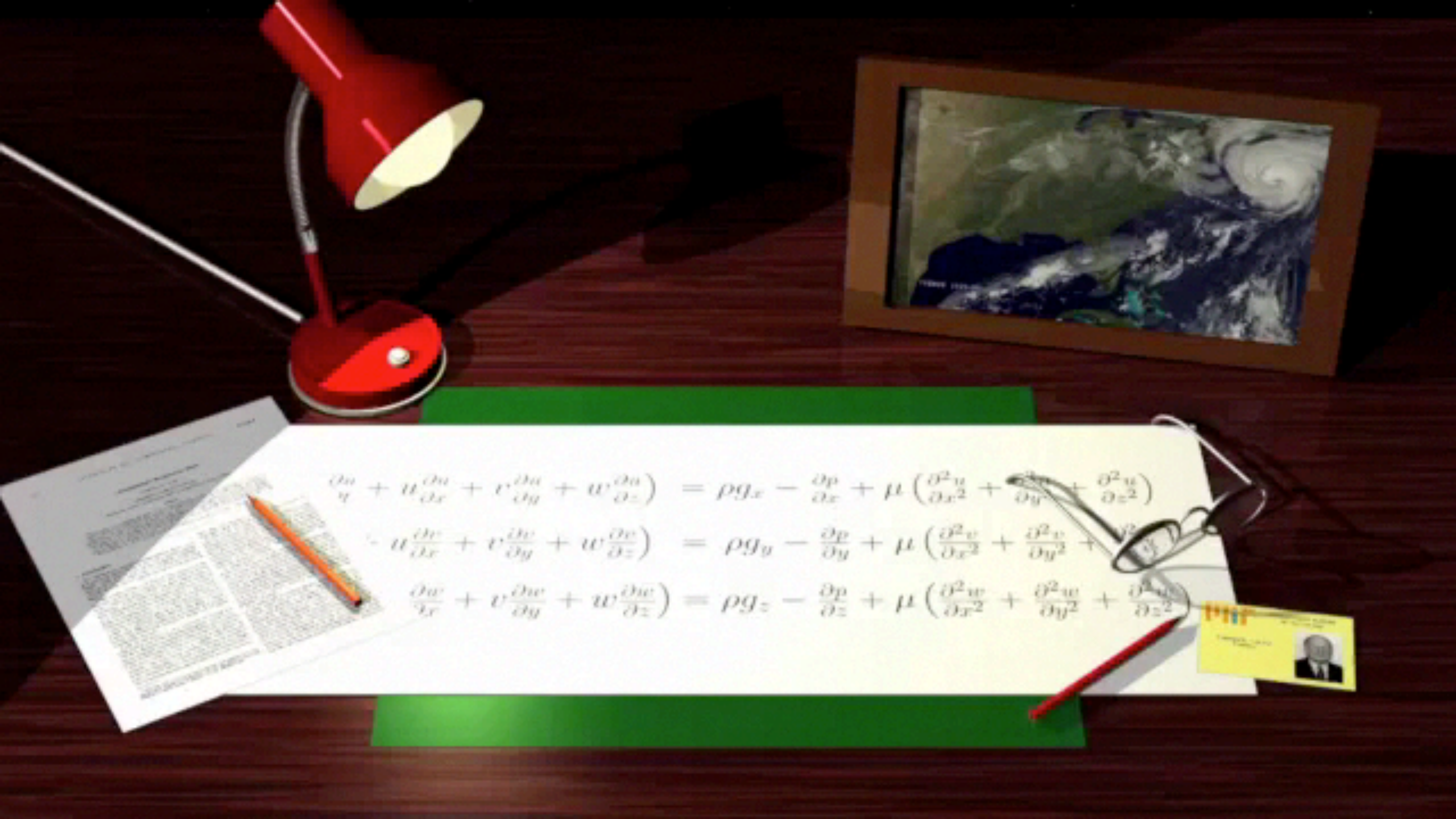
Chaque position  $(x, y, z)$  représente une « position de l'atmosphère ».

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

- $x$  est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection ;
- $y$  à la différence de température entre les courants ascendants et descendants ;
- $z$  à l'écart du profil de température vertical par rapport à un profil linéaire.

Dans ces équations,  $\sigma$ ,  $\rho$  (respectivement le nombre de Prandtl et le rapport du nombre de Rayleigh sur un Rayleigh critique) et  $\beta$  sont trois paramètres réels.





The image shows a desk with a red desk lamp, a framed picture of a storm, a newspaper, a pencil, glasses, and a business card. The business card is yellow and features a portrait of a man in a suit and the letters 'PMT' in a stylized font.

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

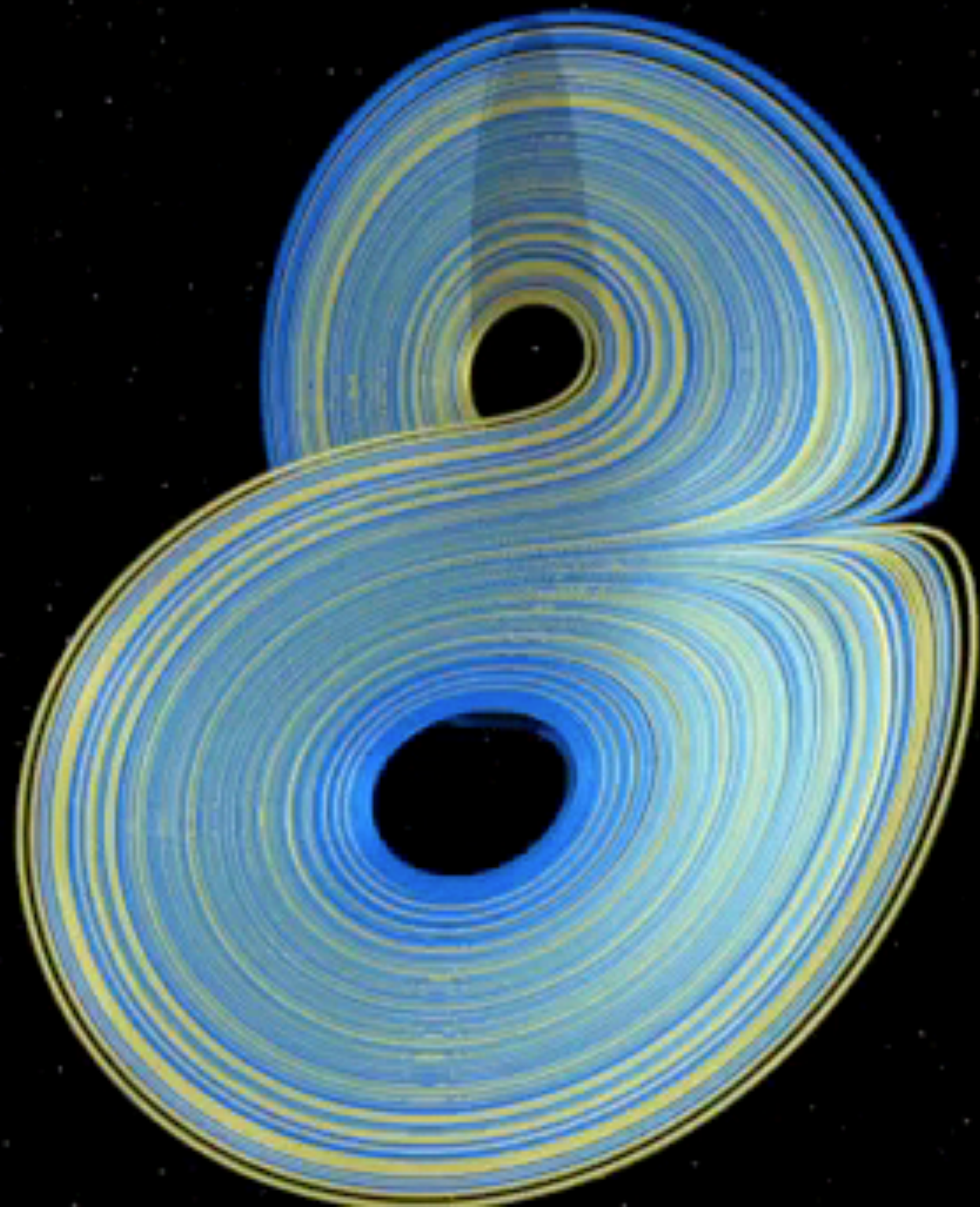


# L'effet papillon

« Le battement des ailes d'un papillon au Brésil peut-il engendrer un ouragan au Texas ? »

- « Si un battement d'ailes de papillon peut engendrer un ouragan, la même chose est vraie pour tous les autres battements d'ailes du même papillon, mais aussi pour les battements d'ailes des millions d'autres papillons, sans parler de l'influence des activités des innombrables autres créatures plus puissantes, comme les hommes par exemple.
- J'avance l'idée qu'au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d'apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu'ils peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent. »







# L'effet papillon

« Le battement des ailes d'un papillon au Brésil peut-il engendrer un ouragan au Texas ? »

- « Si un battement d'ailes de papillon peut engendrer un ouragan, la même chose est vraie pour tous les autres battements d'ailes du même papillon, mais aussi pour les battements d'ailes des millions d'autres papillons, sans parler de l'influence des activités des innombrables autres créatures plus puissantes, comme les hommes par exemple.
- J'avance l'idée qu'au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d'apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu'ils peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent. »



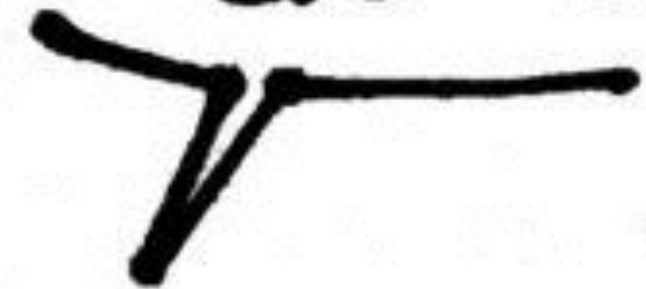




La mouliné grave..



.. Je suis du bord  
du chaos!





# L'ergodicité chez Buffon (1707-1788)



tout s'opère, parce qu'à force de temps tout le rencontre, & que dans la libre étendue des espaces & dans la succession continue du mouvement, toute matière est remuée, toute forme donnée, toute figure imprimée; ainsi tout se rapproche ou s'éloigne, tout s'unit ou se fuit, tout se combine ou s'oppose, tout se produit ou se détruit par des forces relatives ou contraires, qui seules sont constantes, & se balançant sans se nuire, animent l'Univers & en font un théâtre de scènes toujours nouvelles, & d'objets sans cesse renaissans.

*Histoire naturelle des minéraux, 1783.*