AUTOUR DU TROU NOIR

Le trou noir est un objet qui fascine.

C'est avant tout une solution des équations de la relativité générale qui ~~a~~ a permis une meilleure compréhension de la structure de la théorie.

En nov. 1915, Einstein publie sa théorie de la relativité.

L'espace-temps est muni d'une géométrie :

- $\mathcal{M}$: variété Lorentzienne
- $g_{\mu\nu}$: de signature $(-+++)$
  - ↳ encode la force gravitationnelle
  - ↳ toute particule libre suit une géodésique de $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \qquad u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0$$

$x^\mu(\lambda)$

- $g_{\mu\nu}$ est solution des Equations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

↳ Nature de cette équations

No.

Date

Quel est le champ créé par une particule de masse m ?

* En théorie newtonienne, la solution est connue

$$\vec{F} = -m \nabla U \quad \text{avec} \quad \Delta U = 4\pi G \rho$$

Si $\rho = m\,\delta(\vec{r})$ alors $U = -\frac{GM}{r}$

$U = -\frac{GM}{r}$ pour $r > r_c$

$M = 4\pi \int \rho r^2 dr$ est sa masse.

* Peut-on trouver la solution correspondante en RG ?

↳ c'est ce que fera Karl Schwarzschild en 1916.

Pour cela, il faut chercher une métrique $g_{\mu\nu}$ que l'on suppose à symétrie sphérique

$$ds^2 = -\underbrace{g_{tt}(t,r)}_{e^{\nu}} dt^2 + \underbrace{g_{rr}(t,r)}_{e^{\lambda}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

↳ coord. sphériques (t, r, θ, φ)

↳ forme la plus générale

En dehors de la masse centrale $(r=0)$,

$T_{\mu\nu} = 0$ (vide).

On doit donc résoudre $R_{\mu\nu} = 0 = G_{\mu\nu} = 0$

↳ on peut montrer que la solution est nécessairement statique de $\nu(r)$ et $\lambda(r)$

↳ les équations d'Einstein s'écrivent alors

$$\begin{cases} G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{\nu} \frac{d}{dr}\left[r(1-e^{-\lambda})\right] = 0 \quad ① \\ G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{\lambda}(1-e^{-\lambda}) + \frac{1}{r}\nu' = 0 \quad ② \\ G_{\theta\theta} = \dots = 0 \; ; \quad G_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta \, G_{\theta\theta} = 0 \end{cases}$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r} \qquad (r_g, C) : 2 \text{ constantes}$$

$$\nu = -\lambda + C$$

on vérifie $G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} = 0$ sont identiquement satisfaites.

C peut être réabsorbée dans $t \to t'$

si bien que la solution est

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_g/r} + r^2 d\Omega^2$$

c'est la solution de Schwarzschild.

(4)

"J'ai lu votre article avec le plus grand intérêt. Je ne m'attendais pas à ce que l'on puisse formuler la solution du problème de façon si simple. J'ai beaucoup aimé le traitement mathématique du syst. Jeudi prochain je présenterai ce travail à l'Académie avec quelques mots d'explication"

A. Einstein à K.S, janvier 1916

remarques:

- KS suppose statique
- Jebsen (1921) et Birkhoff (1923) prouve que la seule sol. vide + sym. sphérique: Schw
- q^d $r \to \infty$, $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$
  (t, r, θ, φ) mesurent donc le temps propre des observateurs à l'infini
- $r \gg r_g$ $\quad -g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}$
  $= 1 + \frac{2U}{c^2}$ dans la limite newtonienne
  $U = -\frac{GM}{r}$

$$\Rightarrow \boxed{r_g = \frac{2GM}{c^2} \equiv 2m}$$

No.

Date

<u>Mais</u> $\begin{cases} r=0\ ; & g_{\mu\nu} \to \infty \\ r=r_g : & g_{00} \to 0 \text{ et } g_{rr} \to \infty \end{cases}$

L'espace ne semble plus bien défini. Mais les invariants de la métrique ne se comportent pas de la même façon:

- $R=0$ & $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}=0$
- $K = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 12\dfrac{r_g^2}{r^6} = 48\dfrac{m^2}{r^6}$

$$\begin{cases} \to \infty & \text{en } 0 \\ \to 12/r_g^4 & \text{en } r_g \end{cases}$$

on distingue $\begin{cases} \text{- la singularité centrale} \\ \text{- la singularité de Schwarzschild en } r=2m. \end{cases}$

$\begin{cases} \text{• Qu'est-ce la singularité } r=2m\,? \\ \text{• que se passe-t-il quand on la traverse ?} \end{cases}$

Cela va diriger la recherche autour des TN pendant 50 ans.

- Compréhension du lien espace-temps / système de coordonnées

Lemaître (1930)
Eddington (1924) - Finkelstein (1958)

Kruskal (1960) - Szekeres (1960) - Synge (1949)
Penrose (1968)

- Définition de la notion d'horizon et de singularité

Penrose (1964-65) : premier théorème sur singularité
Israel no-hair theorem

- Relation entre TN et thermodynamique

Penrose (1969) : - extraction de énergie d'un TN
λ - théorème de censure cosmique
Bardeen - Carter - Hawking (1972) : 4 lois des TN classiques
Hawking (1971) : area theorem
Bekenstein (1972) : entropie des TN
Hawking (1974-1975) : radiation des TN

cette dernière propriété ouvre vers les aspects quantiques, ce qui explique que ces objets soient encore très étudiés.

clairement, je ne peux pas tout expliquer en 2 heures.

Ce que je vais donc essayer de faire :

1. Voir ce qui se passe quand on tombe vers un TN.
   ↳ distinguer τ et t
   "l'illusion des coordonnées"
   Effet Einstein

2. lumière → notion d'horizon

3. Kruskal et Penrose

   a. M_4
   b. TN → définition d'un TN.
   c. étoile en effondrement.

4. Thermodynamique

5. Propriétés des trous noirs

   a. Penrose process
   b. superradiance
   c. Hawking
   d. information loss - paradoxe (?)

No.

Date

I. Nature de la surface $r = 2m$

- Elle semble singulière $g_{tt} = 0$; $g_{rr} = \infty$
- Mais invariant courbure y sont réguliers

↳ étude des géodésiques de genre temps et lumière

A. trajectoires

Elles peuvent s'obtenir sous forme paramétrique

$$x^\mu(s) = \{ t(s), r(s), \theta(s), \varphi(s) \}$$

où s est le temps propre

t est le temps propre d'un observateur

à l'infini.

de $$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

on déduit

$$1 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - r_g/r} + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2)$$

Techniquement, on peut trouver des constantes du mouvement :

- à chaque symétrie de l'espace-temps est associée une quantité conservée

↳ sym est associée à un chp de vecteur (dit de Killing)

$$\begin{cases} x^\mu \longmapsto x^\mu + \xi^\mu \\ g_{\mu\nu} \longmapsto g_{\mu\nu} \end{cases} \rightarrow \boxed{\mathcal{L}_\xi g = 0 \Leftrightarrow \nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0}$$

↳ $\left.\begin{array}{l} u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0 \\ \nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0 \end{array}\right\}$ $u^\mu \nabla_\mu (u^\nu \xi_\nu) = 0$

$\boxed{Q = u^\nu \xi_\nu}$ est constant sur trajectoire

↳ $\begin{cases} \text{stati cité} \rightarrow Q = \text{Energie} \\ \text{sym sphérique} \rightarrow Q = \text{moment cinétique} \end{cases}$

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t} = \frac{E}{m} \\ r^2 \sin^2\theta \, \dot{\phi} = \frac{L}{m} \end{cases}$$

on peut alors travailler dans le plan $\theta = \pi/2$ ($\dot{\theta} = 0$ sol. des eq. mvt).

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t} = E/m \\ r^2 \dot{\phi} = L/m \\ 1 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{(1 - r_g/r)} + r^2 \dot{\varphi}^2 \end{cases}$$

on obtient en général $\{t(s); r(s); \varphi(s)\}$ une fois (E, L) déterminés par les conditions initiales.

Par simplicité, regardons des géodésiques radiales: $\phi = \phi_0$; $\dot{\phi} = 0$ $(L=0)$

En éliminant $\dot{t}$, on obtient:

$$1 = \frac{E^2}{m^2(1-r_g/r)} - \frac{\dot{r}^2}{1-r_g/r}$$

qui se réécrit

$$m\dot{r}^2 = \frac{E^2}{mc^2} - mc^2\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$$

Si on part de $r=\infty$ avec $\dot{r}=0$, cela fixe $E = mc^2$ (et non $E=0$ comme cela serait le cas en Newtonien)

Et donc

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{GMm}{r}}$$

cela ressemble à Newton mais attention, $\dot{r} = \frac{dr}{ds}$ et pas $\frac{dr}{dt}$!

(12)

Considérons un voyageur avec $\dot{r}=0$ et $r=R$

$$\begin{cases} \dot{r}^2 = -\dfrac{2GM}{R} + \dfrac{2GM}{r} \\ \left(1-\dfrac{2GM}{r}\right)\dfrac{dt}{ds} = \sqrt{1-\dfrac{2GM}{R}} \end{cases}$$

qui s'intègre en

$$\begin{cases} r = \dfrac{R}{2}(1+\cos\eta) \\ s = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{R}{2GM}}\,(\eta+\sin\eta) \end{cases} \qquad \eta = 0..\pi$$

* le temps (propre) pour atteindre $r=0$ $(\eta=\pi)$ est

$$\Delta s = s(\pi) - s(0) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{2GM}} < \infty$$

temps que le voyageur mesure à sa montre

$[R = R_\odot ; M = M_\odot \rightarrow \Delta s = 5\,\mu s]$

il faut un temps fini et rien ne se passe en $r = 2m$!

$$\frac{d\tau|_\infty}{d\tau|_{loc}} = \sqrt{\frac{-g_{00}(\infty)}{-g_{00}(r)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2GM/r}}$$

* Cependant pour un observateur à l'infini, le temps mesuré est donné par :

$$t = -\int_R^r \frac{\sqrt{1-2GM/R}}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\sqrt{\frac{2GM}{r}-\frac{2GM}{R}}}\,dr \longrightarrow \infty \quad \text{qd } r \rightarrow 2m$$

Date

un observateur à l'infini voit le voyageur tomber et ne jamais dépasser $r = 2m$

- Pour un γ $ds^2 = 0$ et on a alors

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 = \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)} \rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

sur $r = 2m$, les γ apparaissent immobiles pour un observateur à l'infini.

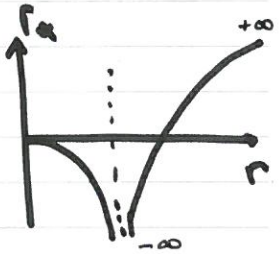
- Pour mieux comprendre, regardons les géodésiques nulles radiales.

$$ds^2 = 0 \rightarrow dt^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} dr^2 \equiv dr^{*2}$$

avec

$$r^* = r + 2m \ln\left|\frac{r - 2m}{2m}\right|$$

"Regge-Wheeler Tortoise"



les géodésiques radiales ont aussi pour équation

$$d(t \pm r^*) = 0$$

$$\begin{cases} v = t + r^* & -\infty < v < +\infty \quad \text{ingoing } (v = \text{c}^{te}) \\ u = t - r^* & -\infty < u < \infty) \quad \text{outgoing } (u = \text{c}^{te}) \end{cases}$$

Date

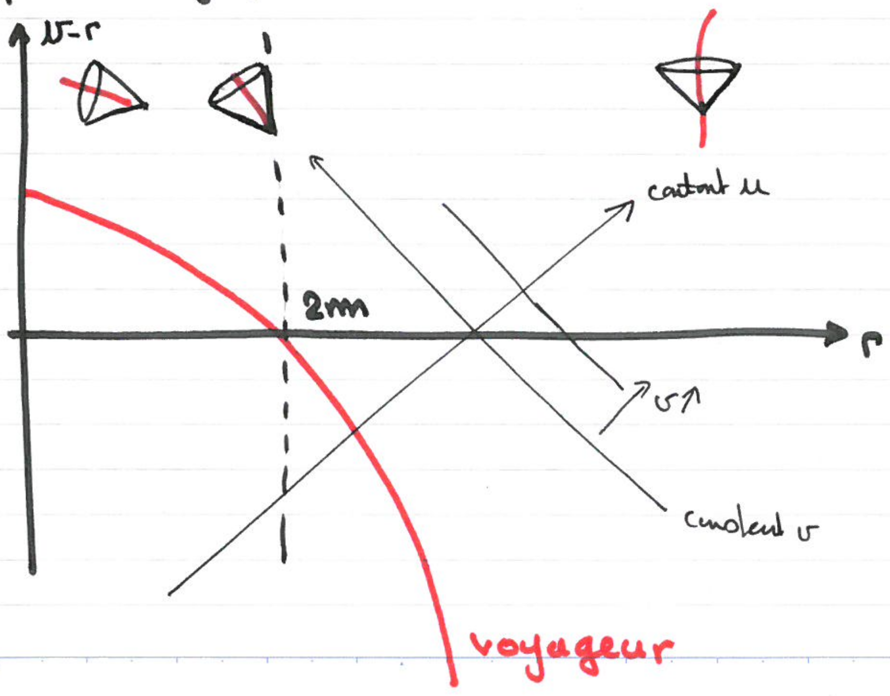
on peut alors réécrire la métrique selon

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(-dt^2 + dr^{*2}\right) + r^2 d\Omega^2$$
$$= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + 2\,dr\,dv + r^2 d\Omega^2$$

. La métrique est initialement définie pour $r > 2m$ (car $v = t + r^*(r)$ n'est déf. que pour $r > 2m$)

. Mais on peut la continuer analytiquement pour tout $r > 0$ car le terme $2\,dr\,dv$ est régulier en $r = 2m$

. cela prouve que $r = 2m$ est une singularité du système de coordonnées et que rien de physique ne s'y passe.



Le cône de lumière se distord quand $r \to 2M$
(il est tangent à $r=2m$ en $r=2m$)

Pour $r \leq 2m$

$$2\,dr\,dv = \underbrace{ds^2}_{\leq 0 \text{ (timelike/nulle)}} - \underbrace{\left(\frac{2m}{r}-1\right)}_{\geq 0} dv^2 - r^2 d\Omega^2$$

$$\leq 0$$

$dv > 0$ pour géodésique future-dirigée.

$\Rightarrow dr \leq 0$

$\Rightarrow$ Aucune géodésique en $r \leq 2m$ ne peut atteindre $r > 2m$

$\boxed{\text{notion d'horizon}}$

. L'espace temps est donc séparé par une surface hemi-perméable
aucune info de $r < 2m$ ne peut être obtenue en $r > 2m$.

No.

Date

↳ existence mathematiq.

↳ sol valide pour $r > R_*$

→ existe-t-il des astres tels que $R_* < 2m$?

↳ modèle d'étoile et étude de leur stabilité.

II. Extension de Kruskal et diagramme de Penrose

• L'espace-temps d'un trou noir est plus vaste que celui couvert par les coordonnées de Schwarzschild.

• comment trouver un système de coordonnées qui couvre tout l'espace-temps ?

① Exemple : espace-temps de Rindler

Considérons la métrique 2D suivante

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2 \qquad t \in \mathbb{R} \quad x \in]0;+\infty[$$

espace plat (Riem = 0) singulier en $x = 0$

↳ [peut-on construire un système de coordonnées cartésiennes du plan euclidien, régulier partout ?]

Pour cela on peut des géodésiques nulles ($ds^2 = 0$)

$$t = \pm \ln x + c^{te}$$

et on introduit

$$\begin{cases} u = t - \ln x \\ v = t + \ln x \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

No (17)

Date

si bien que la métrique prend la forme

$$ds^2 = -e^{v-u}\, du\, dv$$

posons ensuite $\begin{cases} U = -e^{-u} & \in [-\infty; 0] \\ V = e^{v} & \in [0; +\infty] \end{cases}$

$$ds^2 = -dU\, dV$$

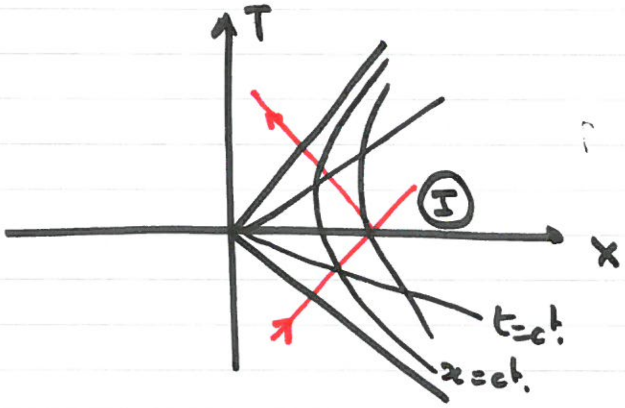
cette métrique est régulière partout en

on peut étendre le domaine de variation de (U, V)

à $\mathbb{R}^2$

pour finir $T = \frac{U+V}{2}$; $X = \frac{V-U}{2}$ mène à

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2$$



on a ainsi : - dernier singularité $x=0$ (coordonnées)

- étendue de I $\longrightarrow \mathcal{M}_4$

- $\begin{cases} T = x \operatorname{sh} t \\ X = x \operatorname{ch} t \end{cases}$

② Schwarzschild

La singularité $r=2m$ n'est pas intrinsèque.

Construisons un système de coord. qui l'éliminent.

- on se restreint au secteur $\theta = ct.$ $\varphi = ct$ de métrique

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} \qquad t \in \mathbb{R}, \quad r \in \left]2m ; +\infty\right]$$

- les géodésiques nulles sont $t = \pm r_*(r)$

$$\begin{cases} u = t - r_* \\ v = t + r_* \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

tels que $ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) du\, dv$ $\quad$ $!\, r(u,v)\, !$

- Ensuite $U = -e^{-u/4m}$ $\quad V = e^{v/4m}$

$\quad \in [-\infty, 0] \qquad \in [0 ; +\infty]$

$$ds^2 = -\frac{32 m^3}{r} e^{-r/2m}\, dU\, dV$$

- $T = \frac{1}{2}(U+V)$ $\quad X = \frac{1}{2}(V-U)$

$\quad \in \mathbb{R} \qquad \in \mathbb{R}$

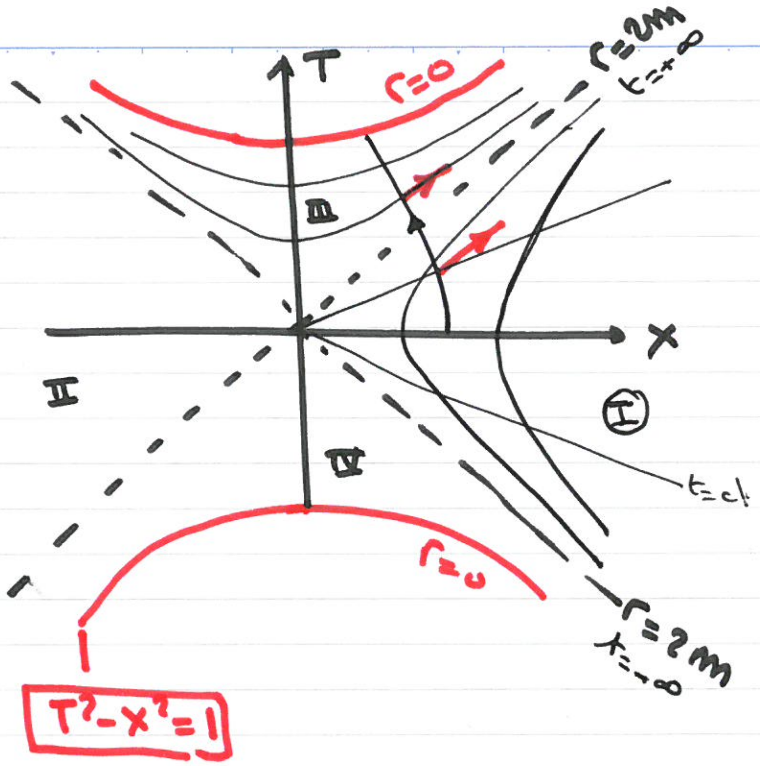
donne la métrique de Kruskal (1960) $ds^2 = -\frac{32m^3}{r} e^{-r/2m}(-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2$

- Dans le passage $(t,r) \to (T,X)$ on a
  - demeure singularité $r = 2m$
  - étendu l'ET car (r,t) ne couvre que les points $X^2 - T^2 > 0$ (I)
  - dans I

$$\begin{cases} T = \sqrt{\dfrac{r}{2m}-1}\; e^{r/4m} \sinh \dfrac{t}{4m} \\ X = \sqrt{\dfrac{r}{2m}-1}\; e^{r/4m} \operatorname{ch} \dfrac{t}{4m} \\ \left(\dfrac{r}{2m}-1\right) e^{r/2m} = X^2 - T^2 \\ \operatorname{th} \dfrac{t}{4m} = \dfrac{T}{X} \end{cases}$$

  - dans les autres cadrans $r(T,X)$ doit être défini. On pose

$$\left(\frac{r}{2m}-1\right) e^{r/2m} = X^2 - T^2 \quad \forall r.$$



- toute courbe du plan (t,r) est représentée 2 fois en (T,X)
- $r=2m$ est $T=\pm X$
- origine du diagramme est un 2-sphère de rayon $2m$
- $t = c^t \Rightarrow T/X = c^t$
- γ émis vers ∞ et horizon

③ Diagramme de Penrose

× propriété : toute métrique 2D est conformément plate, i.e.

$$d\sigma^2 = \gamma_{ab}\, dx^a dx^b$$
$$= \Omega^2 \delta_{ab}\, dy^a dy^b.$$

× les diagrammes de Penrose utilisent cette propriété pour donner une représentation graphique pratique des variétés.

× propriété si $g_{\mu\nu}$ est une métrique et x^μ une géodésique nulle de $g_{\mu\nu}$

$$\left[\, k^\mu g_{\mu\nu} k^\nu = 0 \qquad k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0 \,\right]$$

alors si $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$, c'est aussi une géodésique de $\tilde{g}$ parcourue par $d\sigma = \Omega^2 d\tilde{\sigma}$

$$\tilde{k}^\mu = \Omega^2 k^\mu \text{ satisfait } \begin{cases} \tilde{k}^\mu \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{k}^\nu = 0 \\ \tilde{k}^\mu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{k}^\nu = 0 \end{cases}$$

⟹ conserve la **structure causale**

a. Espace de M_4

Partons de

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad t \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}^+_*$$

et introduisons (ψ, ξ) tq

$$\begin{cases} t + r = \tan \frac{1}{2} \underbrace{(\psi + \xi)}_{\in [-\pi;\pi]} \\ t - r = \tan \frac{1}{2} \underbrace{(\psi - \xi)}_{\in [-\pi;\pi]} \end{cases}$$

$r > 0 \Rightarrow \xi > 0$

on a alors

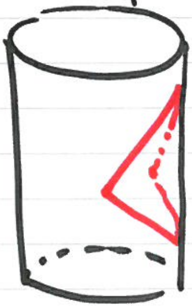
$$ds^2 = \Omega^2 d\tilde{s}^2$$

$$d\tilde{s}^2 = -d\psi^2 + d\xi^2 + \sin^2\xi \, d\Omega^2$$

$$\Omega^2 = \left[4 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\psi + \xi) \cos^2 \tfrac{1}{2}(\psi - \xi)\right]^{-1}$$

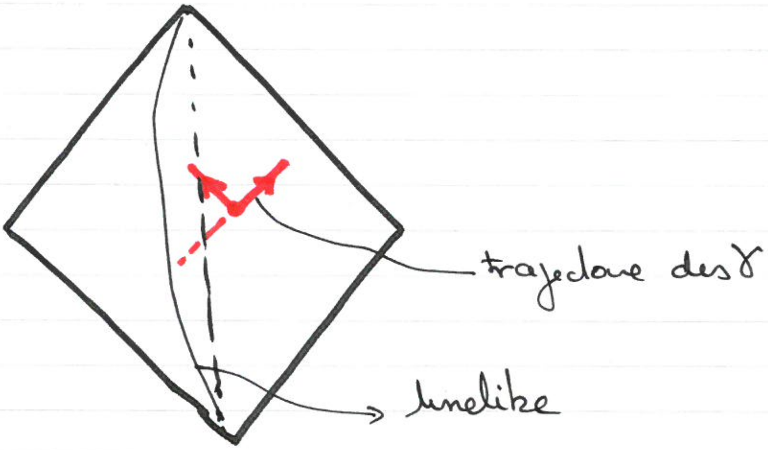
$d\tilde{s}^2$ est celle de l'univers statique d'Einstein

($\psi = c^{te}$ sont des S^3)



$\mathbb{R} \times S_3$

Si on oublie le $r^2 d\Omega^2$ alors



les bords représentent la structure conforme de l'espace-temps M_4.

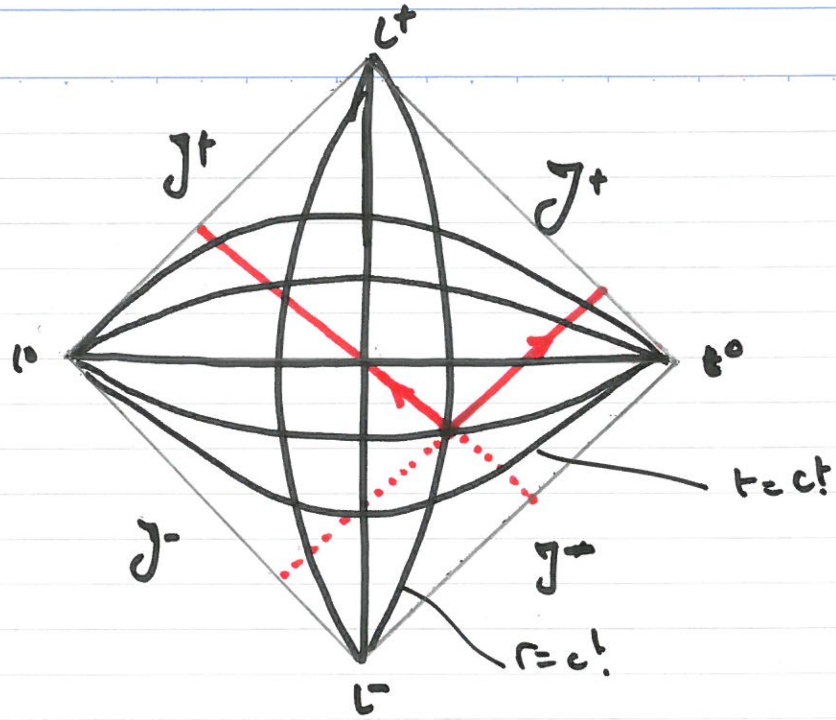
① $\mathcal{J}^+ = \{ \psi = \frac{\pi}{2} , |\xi| < \pi/2 \}$

$\mathcal{J}^- = \{ \xi = \pi/2 , |\psi| \leq \pi/2 \}$

points d'arrivée ou de départ de géodésiques nulles $\rightarrow$ **Null-infinity**

② $i^\pm$: $\psi = \xi = \pm \pi/2$ $\rightarrow$ timelike-infinity

③ i^0 : $\psi = -\xi = \pi/2$ $\rightarrow$ spatial infinity



b. schwarzchild

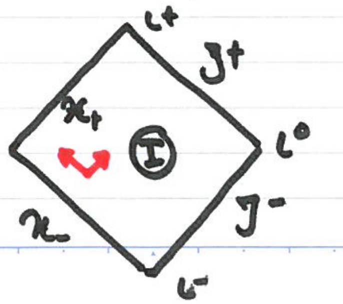
Il faut faire la même analyse cadran par cadran

- I $(X>0,\ T+X>0 \text{ et } T-X<0)$

$$(T,X) \to (\psi,\xi) \text{ tq } \begin{cases} T+X = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\psi+\xi) \\ T-X = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\psi-\xi) \end{cases}$$

si bien que $\psi+\xi \in [0;\pi]$ $\quad \psi-\xi \in [-\pi,0]$ $\quad \xi>0$

$$ds^2 = \Omega^2\left[-d\psi^2 + d\xi^2 + r^2\Omega^{-2}d\Omega^2\right]$$

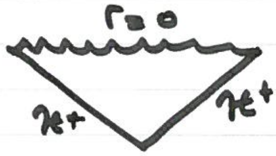


$x_+ = r = 2m$

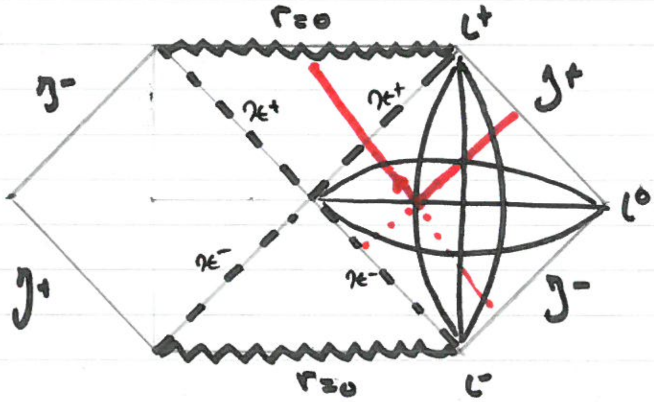
. bloc II s'obtient par $X \to -X$ et $T \to -T$

i.e $\psi \to -\psi$ et $\xi \to -\xi$

. bloc III $T^2 - X^2 < 1$ on peut faire le m̃ chgt de coordonnées

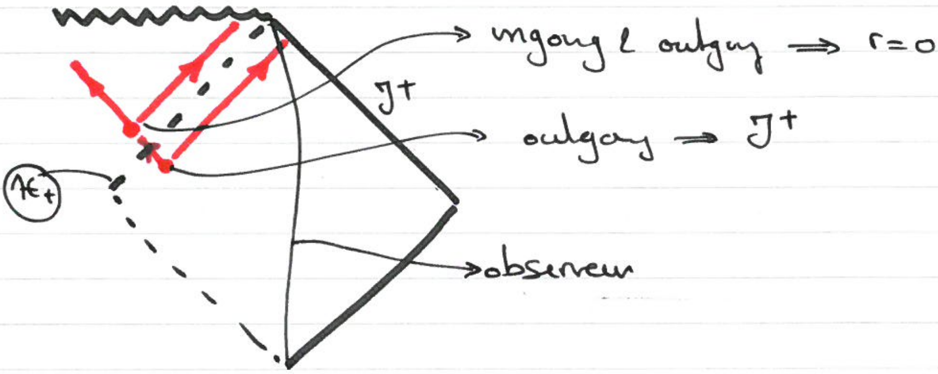


En collant ces morceaux on obtient l'extension maximale de l'espace-tps de Schwarzschild



{ . $r=0$ spacelike singularité
{ . ~ big crunch singularité (r ~ temps)

Notion d'horizon



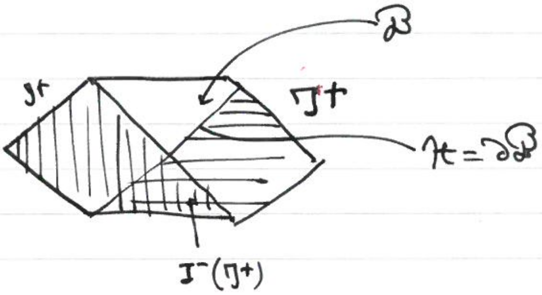
$\mathcal{H}^+$ sépare les events entre ceux qui sont accessibles par observateur et ceux qui sont inaccessible

⟶ $\boxed{\text{horizon des évènements}}$

on définit alors le trou noir et son horizon par

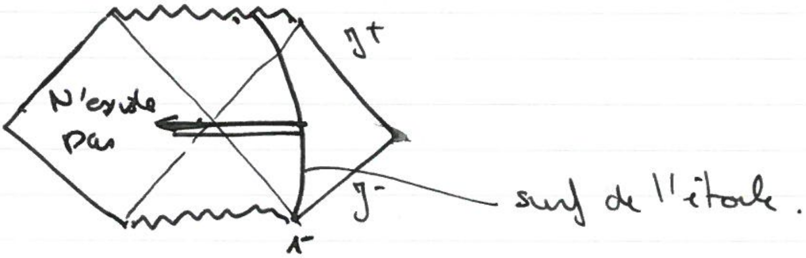
$$\begin{cases} \mathcal{B} = \mathcal{M} - I^-(\mathcal{J}^+) \\ \mathcal{H} = \partial\mathcal{B} \end{cases}$$

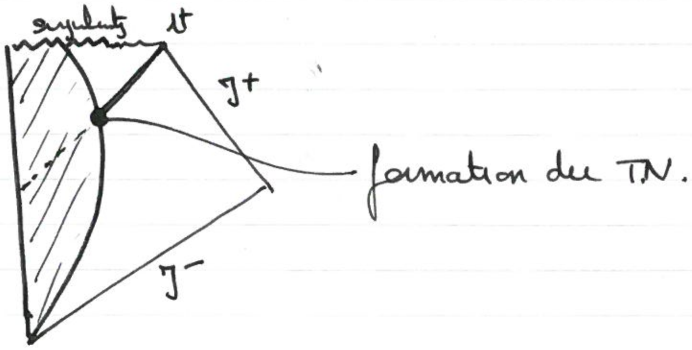
passé causal de $\mathcal{J}^+$



on passe à une définition topologique.

- Ceci est dans un cas très simple.
- Si le TN résulte de l'effondrement gravitationnel d'une étoile





<u>Différentes notions d'horizon :</u>

- $r = 2m$ est surface de décalage spectral infini
  ↪ horizon
- il $\in I^-(i^+)$ ⇒ il borne l'univers visible
  ↪ horiz. des événements.
- ET stationnaire ⇒ ξ_μ KV genre temps

  $$\xi_\mu \xi^\mu = 1 - \frac{2m}{r} = 0 \text{ en } r = 2m \to \text{nul !}$$

  ↪ horizon de Killing.

. $r=2m$ est une surface de genre lumière.

$$n_\mu n^\mu = \left(1-\frac{2m}{r}\right) n_r^2$$

. γ y est au repos pour t d'un obs à l'∞

↳ Trapped surface

. un. out → $r=0$ → horizon apparent.

Ces notions se confondent toutes ici mais diffèrent pour d'autre type de TN.

↳ rq sur Trou de verre.

⇒ possibilités de passer de l'un à l'autre.

No.

Date

III. L'horizon et la thermodynamique des TN.

L'étude générale des TN a montré que la solution est caractérisée seulement par 3 nombres

No-hair theorem (W. Israel, 1967)

$$\boxed{M, J, Q} \qquad a \equiv \frac{J}{M}$$

avec $a^2 + Q^2 \leq M^2$

Si = TN est dit <u>extremal</u>.

$a=0, Q=0$	Schwarzschild
$a=0$	Reissner-Nordström
$Q=0$	Kerr
(a, Q, M)	Kerr-Newmann

Pour la solution de KN l'horizon est localisé en

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$$

Considerons chgt de (M, J, Q) quand on laisse tomber une particule

$$(M, J, Q) \longrightarrow (M+\delta M,\ J+\delta J,\ Q+\delta Q)$$

Penrose (1969) réalise que dans certaines conditions, on peut avoir $\delta M < 0$

- on peut donc extraire de l'énergie d'un TN en rotation (processus de Penrose)
- on démontre alors que

$$\delta M \geq \frac{a\,\delta J + r_+ Q\,\delta Q}{r_+^2 + a^2} \qquad (*)$$

= réversible

> irréversible

Christodoulou-Ruffini obtiennent alors que

$$M^2 = \left(M_{irr} + \frac{Q^2}{4M_{irr}}\right)^2 + \frac{J^2}{4M_{irr}^2}$$

en intégrant $(*)$ et le saturant.

M_{irr} est constant pour des processus réversibles et sinon

$$\delta M_{irr} \geqslant 0 .$$

rq L'energie max. que l'on peut extraire à un TN est $M - M_{irr}$ $\boxed{\text{conduit. rotation}}$

schwarzschild $J = a = 0$, $M = M_{irr}$ $\Rightarrow$ impossible

extremal $(a=0)$ $\frac{M - M_{irr}}{M} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sim 29\,\%$

energie car $1g \sim 5.6 \cdot 10^{32}\,eV$

Pour l'instant, on note juste la similarité avec $\delta S \geqslant 0$.

Hawking (1972) prouve alors que la surface de successive les section de horizon ne peut pas décroître

$$\delta A \geqslant 0$$

et que pour plusieurs TN

$$\delta\left(\sum_a A_a\right) \geqslant 0 .$$

Hawking tentait d'attribuer au TN une entropie $S_{BH} = \alpha A$

black hole
Bekenstein-Hawking. !

L'equation de masse donne alors pour une transformation réversible

$$dM = \Omega\, dJ + \Phi\, dQ + T_{BH}\, dS_{BH}$$

$\Omega = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$ (vitesse angulaire)

$\frac{Q r_+}{r_+^2 + a^2}$ (potentiel électrique)

avec $T_{BH} = \frac{\partial M}{\partial S_{BH}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial M}{\partial A} = \frac{\kappa}{8\pi\alpha}$

c'est la première loi thermodynamique des TN

κ est la gravité de surface

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{r_+^2 + a^2}$$

$$= \frac{GM}{r_s^2} = \frac{1}{4M} \quad \text{pour Schwarzschild.}$$

$$= 0 \quad \text{pour TN extremal.}$$

une demonstration generale de cette loi sera donnee par Bardeen. Carter- Hawking.

↳ <u>loi 0</u> : κ et donc T est constant sur l'horizon.

• <u>BH entropy</u>

Pour Bekenstein, on peut associer une S au TN.

$$S_{BH} = \hat{\alpha} \frac{A}{l_p^2} \qquad l_p^2 = \frac{\hbar G}{c^3}$$

Il associe cela à la nature quantique qui limite l'existence de transformations reversibles (la particule doit avoir un moment angulaire exactement nul, pour que la transfo. soit réversible) sur $\mathcal{H}$,

Aussi de façon effective, les effets quantiques imposent une taille min $\sim \lambda_{compton} = \frac{\hbar}{mc}$,

ce qui explique une borne inf. entre π et M_{irr}.

→ il obtient l_p^2 indépendant du BH et particule.

Now si on se rappelle que l'on perd à cause du no-hair une information de 1 bit (par 1 particule) et on identifie (à la Brillouin information ave negative entropy) il vient que

$$\hat{\alpha} \sim \frac{\ln 2}{8\pi}$$

Ainsi Bekenstein S = mesure de l'information sur intérieur de horizon, inaccessible de l'extérieur.

Dès lors il faut une T

$$T = \frac{1}{8\pi\hat{\alpha}} \frac{\hbar}{c} \kappa$$

↳ deuxième loi

$$\delta(S_{BH} + S_{mat}) \geqslant 0$$

Radiation de Hawking (1974)

S.H (qui pensait que $T_{BH} \neq 0$ ne faisait aucun sens) découvre le phénomène de radiance quantique.

→ définit $T_{BH} = \frac{1}{2\pi} \frac{K}{c} K$

si bien que $\hat{\alpha} = \frac{1}{4}$

$$T_{BH} = 6.2\ 10^{-8} \frac{M_\odot}{M} K$$

L'origine de ce rayonnement est

- quantique
- vient du fait que la notion de vide (et donc de particules) est une notion globale.
- obs extérieur à $r = \infty$ voit un rayonnement thermique

No. 37

cela fixe $\hat{\alpha}$

$$S = \frac{1}{4}\frac{A}{l_p^2}$$

cela soulève bcp de question

- interprétation de S_{BH} à la Boltzmann i.e. comme nbr de micro états.
- flux $\sim \sigma T_{BH}^4 \sim R_{BH}^2 T_{BH}^4 \sim M^2 M^{-4} \sim M^{-2}$

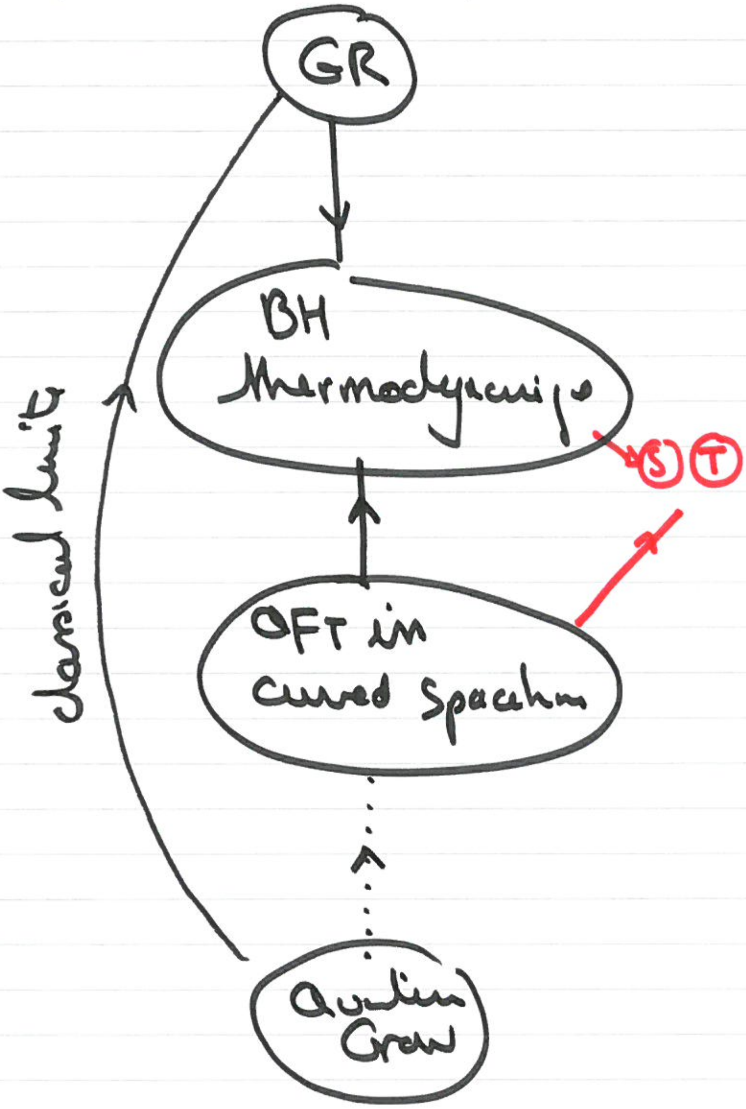
$\Rightarrow$ décroissance séculaire de M

$$\frac{dM}{dt} \sim M^{-2} \longrightarrow M^3 = M_0^3 - (t - t_0)$$

$$t_{evap} \sim 10^{10}\,yr \left(\frac{M}{10^{14}g}\right)^3$$

↳ point final de évaporation ?

↳ y a-t-il un paradoxe de perte d'information (une partie du paquet d'onde → singularité)



Is information lost or not ?

NON : pb avec quanta-
OUI : unitarité QM

possibilités :

→ perdue
→ emportée avec le TN (Rayon dev. de GR!)
→ but à la fin de évaporation (voir Bekenstein bound)

↳ stocké ds planck-size remnant

↳ stocké ds baby univers ([illegible]-Carter Kerr)

↳ encodé ds corrélations futur-passé

(remet en question notion de types classiques)

QM ↘
→ event horizon
GR ↗

? QM est incomplet (Hawking pdt 30 ans)