# Introduction à la cosmologie

Alain Riazuelo

4 août 2008

## 1 Expansion de l'univers

Depuis les années 1930, l'on sait, principalement grâce à Edwin Hubble, que l'Univers est en expansion, c'est-à-dire que les galaxies lointaines s'éloignent de nous d'autant plus vite qu'elles sont loin. Nous allons dans un premier temps essayer de comprendre l'origine de ce phénomène.

### 1.1 Un exemple newtonien

Considérons une sphère de matière homogène (de densité constante) uniquement soumise à sa propre gravitation. L'évolution du rayon de cette sphère et donc de sa densité pourra par certains côtés représenter celle de l'univers.

Considérons un point de masse $m$ (sans importance pour la suite) situé en bordure de la sphère de rayon $R$ et attaché à celle-ci. L'évolution de sa distance au centre est donnée par la loi de l'attraction universelle

$$m\ddot{R} = -\frac{GmM}{R^2},$$

où un point désigne la dérivée par rapport au temps. La masse $m$ ne joue aucun rôle ici et peut s'enlever de l'équation

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $\dot{R}$. Il vient

$$\dot{R}\ddot{R} = -\frac{GM\dot{R}}{R^2}.$$

On remarque que de part et d'autre les quantités sont des dérivées d'autres quantités par rapport au temps. L'on peut donc intégrer cette équation selon

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 = \frac{GM}{R} + \epsilon,$$

$\epsilon$ étant une constante d'intégration.

Cette formulation suggère que le rayon de la sphère joue un rôle dans sa dynamique. En réalité il n'en est rien. La quantité localement observable n'est pas le rayon de la sphère, mais son taux d'expansion : si la sphère est homogène, deux point séparés d'une distance $d$ vont s'éloigner l'un de l'autre à la vitesse $d\dot{R}/R$, quelle que soit la valeur de leur distance $d$.

En considérant donc le taux d'expansion $\dot{R}/R$ (que l'on va par la suite noter $H$), il vient

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{2GM}{R^3} + \frac{2\epsilon}{R^2}.$$

Le premier terme du membre de droite correspond à une constante près à la masse volumique $\mu$ de la sphère, $\mu = M/(4\pi R^3/3)$. On a donc

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\mu}{3} + \frac{2\epsilon}{R^2},$$

soit

$$3\left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{2\epsilon}{R^2}\right) = 8\pi G\mu.$$

À partir d'une des formes de l'équation ci-dessus, il est possible de calculer l'évolution de la masse volumique de la sphère (exercice : le faire), notamment en fonction de la constante $\epsilon$. (Réponse : dans le cas où $\epsilon$ est nul, $R \propto t^{\frac{2}{3}}$, soit $\mu \propto t^{-2}$ ; quand $\epsilon$ est positif, la sphère s'étend indéfiniment avec une vitesse qui tend vers $\dot{R} \to \sqrt{2\epsilon}$ ; quand $\epsilon$ est négatif, l'expansion s'arrête pour laisser place à une phase de contraction, son rayon maximal étant alors $R_{\max} = \sqrt{GM/|\epsilon|}$)

## 1.2 Les équations relativistes

En réalité, le modèle ci-dessus est inapte à rendre compte de l'expansion de l'univers. Il faut pour cela faire appel à la relativité générale... ce qui induit un nombre non négligeable de complications !

D'après la célébrissime équation $E = mc^2$, ce n'est en réalité pas la masse qui est à l'origine de la gravitation, mais l'énergie. Dans les équations décrivant l'évolution de la dynamique de l'expansion, ce n'est pas la masse volumique qui intervient, mais la densité d'énergie $\rho$. Pour de la matière ordinaire, masse volumique et densité d'ńergie sont reliées par la relation $\rho = \mu c^2$. Cette relation n'est en général pas effective pour d'autres formes de matière. L'évolution de la densité d'énergie avec l'expansion est déterminée par le premier principe de la thermodynamique, qui indique q'un système isolé dont le volume $V$ varie voit son énergie $U$ (dite énergie interne dans ce contexte) selon la loi

$$\mathrm{d}U = -P\mathrm{d}V,$$

$P$ étant la pression. L'énergie $U$ pouvant s'écrire comme le produit de la densité d'énergie $\rho$ et du volume $V$, cette relation peut se réécrire

$$\mathrm{d}\rho = -(P + \rho)\frac{\mathrm{d}V}{V},$$

ou bien, en considérant l'évolution temporelle,

$$\dot{\rho} = -(P + \rho)\frac{\dot{V}}{V}.$$

On peut réexprimer cette relation en notant que le taux de variation du volume $\dot{V}/V$ est relié au taux d'expansion $H$ par la relation

$$\frac{\dot{V}}{V} = 3H,$$

ce qui permet de réécrire le résultat trouvé selon

$$\dot{\rho} = -3H(P + \rho).$$

Cette relation permet, quand on connaît l'équation liant la pression $P$ à la densité d'énergie $\rho$, de déterminer l'évolution de cette dernière. En particulier :

- Avec de la matière ordinaire de pression nulle ou négligeable devant la densité d'énergie (c'est-à-dire dont la température $T$ est telle que $k_{\mathrm{B}}T \ll mc^2$, $k_{\mathrm{B}}$ étant la constante de Boltzmann et $m$ la masse des particules considérées ; Exercice : vérifier que c'est le cas dans l'univers actuel), on a comme déjà démontré

$$\rho_{\mathrm{mat}} \propto \frac{1}{V}.$$

- Avec des photons, on a la relation

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3}\rho_{\mathrm{rad}},$$

dont on tire

$$\rho_{\mathrm{rad}} \propto \frac{1}{V^{\frac{4}{3}}}.$$

- Une constante cosmologique peut être définie comme une forme de matière extrêmement atypique, puisque sa pression serait négative et opposée à sa densité d'énergie : $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$. On a alors
$$\rho_\Lambda = \text{Constante}.$$

Ces considérations permettent de réécrire les équations de l'expansion de l'univers. L'on montre en effet qu'elles ont une forme essentiellement identiques à celle obtenue dans le modèle newtonien, à ceci près que l'interprétation à donner à certaines quantités est différente :

- La quantié $R$ qu au départ représentait le rayon d'un hypothétique sphère de matière est en réalité une distance (arbitraire) prise entre deux objets donnés, qui varie au cours du temps du fait de l'expansion. Tout autre distance varie proportionnellement à cette distance de référence, appelée facteur d'échelle. Afin de ne pas entretenir de confusion avec un hypothétique "rayon" de l'univers, ce facteur d'échelle sera noté $a$.
- La quantité $\epsilon$, qui apparaissant comme étant proportionnelle à l'énergie du système devient une quantité géométrique appelée courbure scalaire (notée $K$) et décrivant la géométrie de l'espace. Elle donne l'ordre de grandeur des distances au-delà desquelles l'espace diffère de l'espace tridimensionnel habituel, par exemple par le fait que le théorère de Pythagore n'y est plus valide.

Avec ces remarques, les équations qui décrivent l'expansion de l'univers sont
$$3\left(\frac{H^2}{c^2} + \frac{K}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}\rho,$$
$$H = \frac{\dot{a}}{a},$$
$$\dot{\rho} = -3H(P+\rho).$$

## 1.3 Quelques applications

On peut résoudre ce système d'équations une fois que l'on se donne la relation entre pression et densité. La plupart des cas intéressants correspondent aux situations où pression et densité sont proportionnelles l'une à l'autre, selon la loi
$$\frac{P}{\rho} = w.$$

Dans ce cas, on peut résoudre l'équation d'évolution du facteur d'échelle, qui donne
$$a \propto t^{-\frac{2}{3(1+w))}}$$
si $w$ est différent de $-1$, et
$$a \propto \exp(Ht)$$
si $w = -1$ (auquel cas la quantité $H$ est constante).

On note que tant que $w$ est positif, la dérivée seconde du facteur d'échelle est négative : $\ddot{a} < 0$. Les observations actuelles indiquent au contraire que l'expansion s'accélère, c'est-à-dire que la distance entre deux points quelconques croît de plus en plus vite. Cela prouve qu'il existe dans l'univers une forme de matière mystérieuse (et totalement inconnue en laboratoire) dont la pression est négative. Faute de mise en évidence directe et de renseignements sur sa nature, cette forme de matière est appelée énergie noire (Exercice : trouver la valeur maximale de $w$ permettant d'avoir une accélération de l'expansion, c'est-à-dire $\ddot{a} > 0$ ; Reponse : $w_{\max} = -\frac{1}{3}$).

# 2 Formation des grandes structures

Dans l'atmosphère terrestre, une fluctuation de densité de l'air ambiant va se propager : au sein de celle-ci, les forces de pression tendent à la dilater, ce qui va contracter les régions voisines, qui elles-mêmes vont se dilater sous l'effet des forces de pression, et ainsi de suite de proche en proche. Cette fluctuation de densité va voyager à une vitesse appelée vitesse du son... puisque le son n'est rien d'autre que d'infimes fluctuations de densité qui se propagent dans l'air. À plus grande échelle, ce phénomène de propagation est susceptible de changer radicalement. La masse de la surdensité, si elle est suffisamment importante (c'est-à-dire que la surdensité est d'extension spatiale suffisamment grande), va générer un champ gravitationnel qui va au contraire des forces de pression tendre à contracter la surdensité. Il existe donc un régime critique où les forces de pression ne peuvent plus assurer la stabilité des fluctuations de densité. On parle d'instabilité de Jeans.

## 2.1 L'instabilité de Jeans

On s'intéresse à la propagation d'une onde de densité dans un milieu homogène infini au repos de masse volumique $\mu_0$. On note par la vecteur $\xi(\mathbf{x})$ le déplacement que subit l'élément de fluide initialement situé au point $\mathbf{x}$. Les équations qui régissent les mouvements du fluide sont l'équation dite de conservation de la masse et l'équation dite d'Euler, qui décrit le bilan des forces auxquelles l'élément de fluide considéré est soumis. Ces deux équations s'écrivent

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla P}{\mu} + \mathbf{g}.$$

Ici, $\mathbf{v}$ représente la vitesse de l'ément de fluide (qui ici correspond à $\mathbf{v} = \dot{\xi}$), $P$ est sa pression et $\mathbf{g}$ son champ gravitationnel. Chaque élément de fluide a une masse volumique proche de la valeur au repos $\mu_0$, aussi écrit-on qu'elle vaut $\mu = \mu_0 + \delta\mu$, la quantité $\delta\mu$ étant considérée comme petite. Avec ces notations, l'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\dot{\delta\mu} + \mu_0 \nabla \cdot \dot{\xi} = 0,$$

et l'équation d'Euler

$$\ddot{\xi} = -\frac{\nabla \delta P}{\mu_0} + \mathbf{g}.$$

On va supposer que les perturbations de pression et de masse volumique du fluide sont reliées par une certaine relation, par exemple une relation qui prend en compte le fait que chaque élément de fluide est à une même température, ou au contraire que chacun d'entre eux n'a le temps d'échanger de chaleur avec ses voisins, auquel cas sa température est fonction de la surdensité. On note donc

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial \mu} \delta\mu.$$

On est naturellement amené à introduire ce que l'on appelle le coefficiennt de compressibilité du fluide, noté avec la lettre grecque $\chi$ (prononcer "khi"), qui vaut

$$\chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}.$$

Ce coefficient donne le taux de variation du volume quand une variation de pression est appliquée au fluide selon

$$\frac{\delta V}{V} = -\chi \delta P.$$

(Le signe $-$ dans la définition résulte du fait qu'une augmentation de la pression extérieure provoque sauf cas particulier une diminution du volume.) En pratique, la masse volumique est proportionnelle à l'inverse du volume, aussi le coefficient de compressibilité s'écrit-il

$$\chi = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P},$$

ce qui ici permet d'écrire

$$\delta P = \frac{1}{\mu_0 \chi} \delta \mu.$$

L'éequation d'Euler de réécrit alors

$$\ddot{\xi} = -\frac{1}{\mu_0 \chi} \nabla \frac{\delta \mu}{\mu_0} + \mathbf{g}.$$

Négligeons un instant la présence de la gravité. Les deux équations se résument désormais à

$$\frac{\dot{\delta \mu}}{\mu_0} + \nabla \cdot \dot{\xi} = 0,$$

$$\ddot{\xi} = -\frac{1}{\mu_0 \chi} \nabla \frac{\delta \mu}{\mu_0}.$$

La combinaison de ces deux équations permet alors d'obtenir

$$\frac{\ddot{\delta \mu}}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0 \chi} \Delta \frac{\delta \mu}{\mu_0} = 0.$$

En cherchant des solutions sous forme d'ondes, c'est-à-dire du type $\delta \mu / \mu_0 \propto e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$, il vient

$$\frac{\delta \mu}{\mu_0} \left( -\omega^2 + \frac{k^2}{\mu_0 \chi} \right) = 0.$$

Ceci signifie que des ondes de densité sont susceptibles de se propager à la vitesse

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi}}.$$

Cette dernière quantité est appelée vitesse du son (que l'on notera par la suite $c_{\rm s}$).

En présence de gravité, la situation change radicalement. Le champ gravitationnel $\mathbf{g}$ est relié au potentiel gravitationnel $\phi$ par la relation

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi,$$

qui lui-même est relié à la distribution de matière par la relation

$$\Delta \phi = -\nabla \cdot \mathbf{g} = 4 \pi G \delta \mu.$$

La nouvelle équation décrivant l'évolution des ondes de densité s'écrit alors

$$\frac{\ddot{\delta \mu}}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0 \chi} \Delta \frac{\delta \mu}{\mu_0} - 4 \pi G \mu_0 \frac{\delta \mu}{\mu_0} = 0.$$

Les solution en ondes planes proposées précédemment indiquent que l'on doit avoir

$$\frac{\delta \mu}{\mu_0} \left( -\omega^2 + \frac{k^2}{\mu_0 \chi} - 4 \pi G \mu_0 \right) = 0.$$

Cette équation admet des solutions si et seulement si la quantité

$$\frac{k^2}{\mu_0 \chi} - 4\pi G \mu_0$$

est positive. Cela signifie donc que

$$\frac{k^2}{\mu_0 \chi} > 4\pi G \mu_0,$$

ou bien en considérant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ et la vitesse du son précédemment définie,

$$\lambda < \lambda_{\mathrm{J}}, \quad \lambda_{\mathrm{J}} = c_{\mathrm{s}} \sqrt{\frac{\pi}{G \mu_0}}.$$

La quantité $\lambda_{\mathrm{J}}$ est appelée longueur de Jeans. Elle délimite la longueur d'onde maximale d'une onde sonore. Au-delà de cette longueur, la perturbation s'effondre sur elle-même au lieu de se propager, c'est ce que l'on appelle instabilité de Jeans.

## 2.2 La formation des structures

Les fluctuations de densité soumises à l'instabilité de Jeans croissent a priori exponentiellement : pour des longueurs d'onde supérieures à la longueur de Jeans, les fluctuations croissent selon $e^{\Gamma t}$, avec

$$\Gamma = \sqrt{4\pi G \mu_0 \left(1 - \frac{\lambda_{\mathrm{J}}^2}{\lambda^2}\right)}$$

Une des occurences de l'instabilité de Jeans se produit quand un objet se refroidit brutalement. La vitesse du son, et donc la longuer de Jeans, augmentent avec la température. Lors d'une phase de refroidissement, elles sont amenées à diminuer. Si un objet se refroidit "rapidement", c'est-à-dire sans avoir le temps de se réajuster suite à ce refroidissement, il se peut que sans que varie sa taille, celle-ci devienne plus grande que la longueur de Jeans, qui diminue. Dans ce cas, l'objet va être amené à se fragmenter en plusieurs objets de plus petite taille, tous étant plus petits que la nouvelle longueur de Jeans.

En cosmologie, l'instabilité de Jeans se produit dans un autre contexte. Du fait de l'expansion de l'univers, une flcutuation de densité est elle-même diluée par l'expansion. Ce phénomène de dilution atténue considérablement l'instabilié de Jeans. Au lieu de se produire selon une loi exponentielle, elle croît au mieux comme le facteur d'échelle $a$.

Le fond diffus cosmologique est le plus ancien rayonnement de l'univers. Il a été émis environ 380 000 ans après le Big Bang, quand l'univers était environ un milliard de fois plus dense qu'aujourd'hui. ce rayonnement est extrêmement uniforme, preuve que l'univers d'alors était très homogène. On y observe cependant des variations d'intensité de ce rayonnement en fonction de la direction d'observation. Ces variations sont très faibles, de l'ordre de quelques cent-millièmes de degrés, valeur très faible par rapport à la température de ce rayonnement (2,73 kelvens, c'est-à-dire 2,73 degrés au-dessus du zéro absolu). Les fluctuations de température de ce rayonnement sont reliées aux fluctuations de densité de la matière ordinaire selon la loi $\delta T/T = \frac{1}{4}\delta\mu/\mu$. Ces chiffres sont-ils compatibles avec l'existence de structures dans l'univers actuel ? (Réponse : a priori non ! Si l'univers était un milliard de fois plus dense à l'époque de l'émission de ce rayonnement, les distance étaient 1000 fois plus petites. Le facteur d'échelle a donc crû d'un facteur 1000 depuis cette époque. Ce facteur 1000 représente aussi le taux de croissance des fluctuations de densité. En prenant des fluctuations de température à l'époque de l'ordre de $10^{-5}$, on a des fluctuations de densité qui étaient de l'ordre de $4 \cdot 10^{-5}$, qui aujourd'hui sont 1000 fois plus grandes, c'est-à-dire de l'ordre de $4 \cdot 10^{-2}$. Ce chiffre est très inférieur à 1, valeur nécessaire pour former des objets astrophysiques. Ce paradoxe est résolu en supposant l'existence d'une autre forme de matière, appelée matière noire et qui n'interagit pas avec le rayonnement. Les fluctuations de température du fond diffus cosmologique peuvent ainsi être très différentes de celles de la matière noire, qui peuvent par conséquent être devenue supérieures à 1 aujourd'hui, pour peu qu'à l'époque d'émission du fond diffus cosmologique elles aient déjà été de l'ordre de $10^{-3}$.)