



# LA MEILLEURE ET LA PIRE ERREUR DE POINCARÉ

*Cédric Villani*

*Univ. Lyon & Institut Henri Poincaré*

*Fleurance, le 12 août 2015*

*Conférence du soir*

# LA MEILLEURE ET LA PIRE ERREUR DE POINCARÉ

« La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit;  
mais c'est cet éclair qui est tout »

*H. Poincaré*

*Cédric Villani*

*Univ. Lyon & Institut Henri Poincaré*

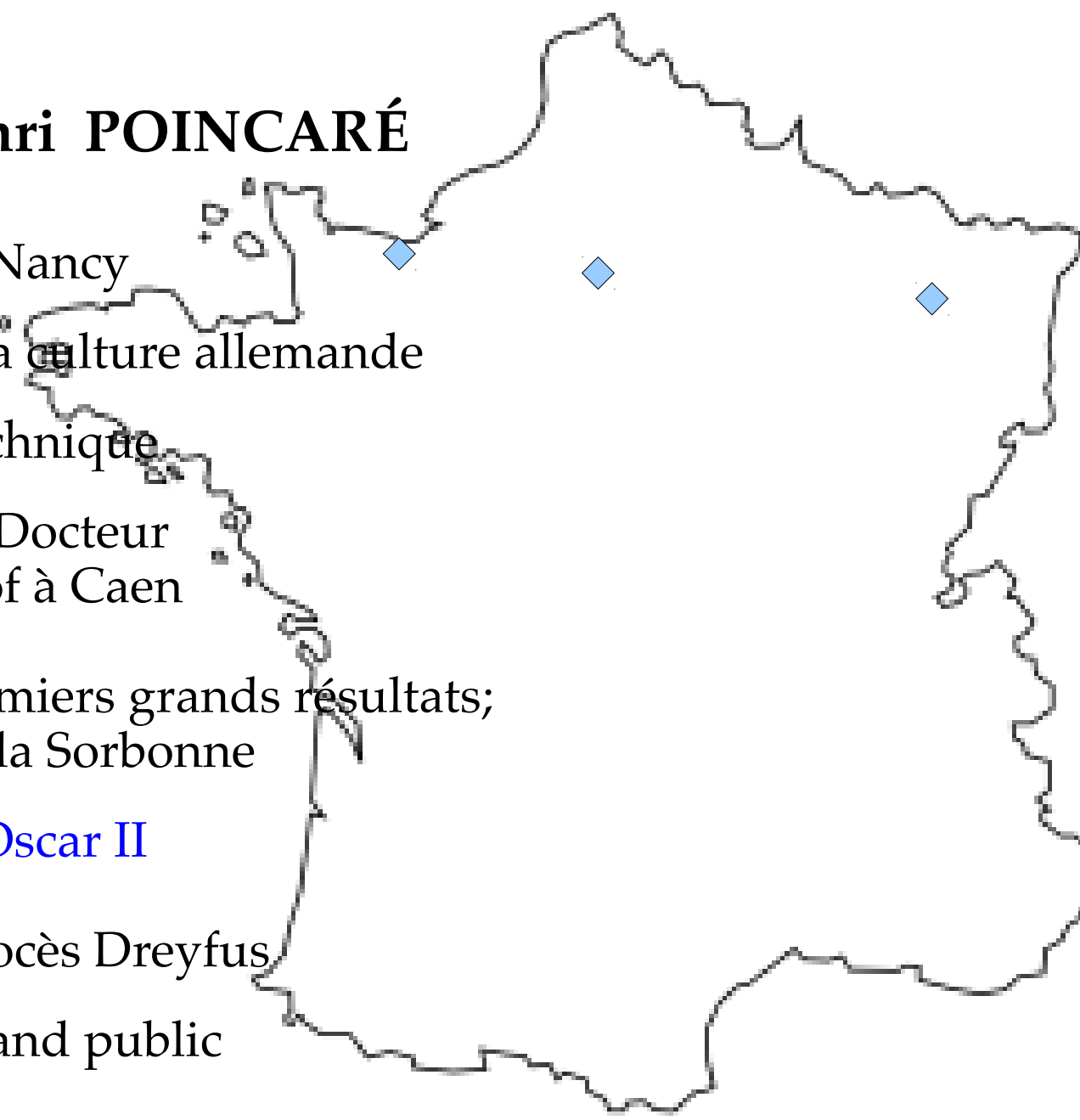
*Fleurance, le 12 août 2015*

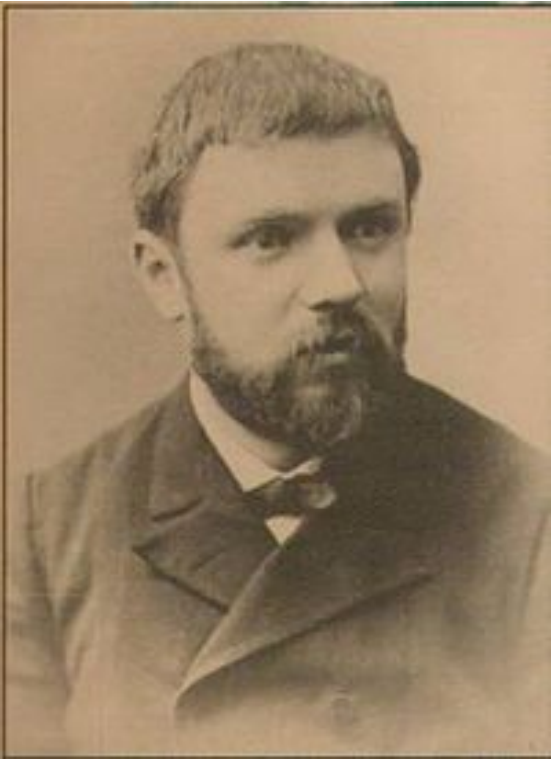
*Conférence du soir*

# (Jules) Henri POINCARÉ

- 1854 Naissance à Nancy
- 1870 La guerre – la culture allemande
- 1873 École Polytechnique
- 1879 Ingénieur & Docteur  
Assistant prof à Caen
- \*1881 Mariage; premiers grands résultats;  
Professeur à la Sorbonne
- 1887 [Prix du Roi Oscar II](#)
- 1899-1904 Expert au Procès Dreyfus
- 1901-1911 Ouvrages grand public
- 1910 Examen par le Dr Toulouse
- 1912 Décès à Paris

# (Jules) Henri POINCARÉ

- 
- 1854 Naissance à Nancy
  - 1870 La guerre – la culture allemande
  - 1873 École Polytechnique
  - 1879 Ingénieur & Docteur  
Assistant prof à Caen
  - \*1881 Mariage; premiers grands résultats;  
Professeur à la Sorbonne
  - 1887 **Prix du Roi Oscar II**
  - 1899-1904 Expert au Procès Dreyfus
  - 1901-1911 Ouvrages grand public
  - 1910 Examen par le Dr Toulouse
  - 1912 Décès à Paris





Raymond Poincaré (1860-1934)

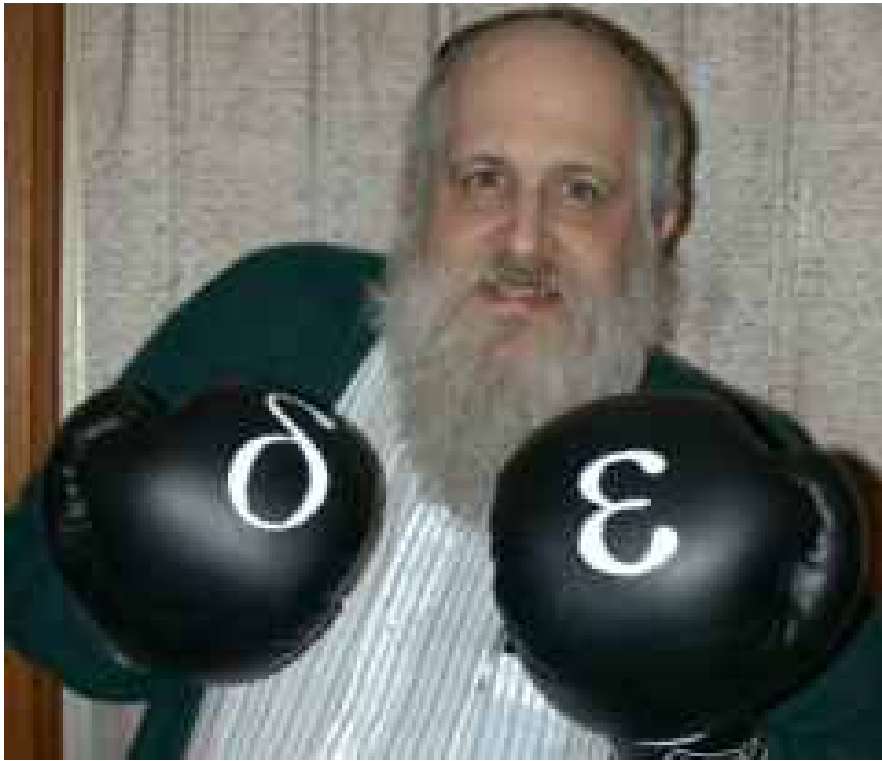
INSTITUT HENRI POINCARÉ

1811 - 2011

Bicentenaire de la naissance  
d'Évariste Galois







Prix Henri  
Poincaré 2012



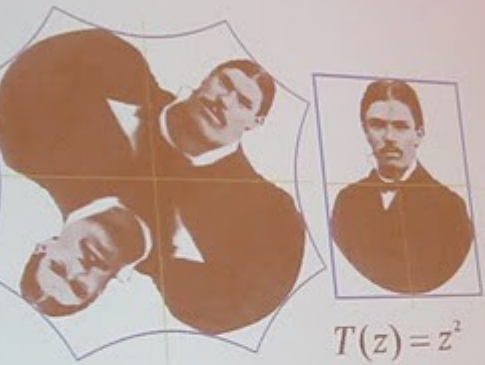
AN HENRI POINCARÉ MYSTERY

# ALL CRY CHAOS

LEONARD ROSEN



arrées de Poincaré



$$T(z) = z^2$$

Étienne Ghys Paris, juin 2010



HENRI POINCARÉ

2010 G. BONDARD

*« Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir. »*

*(La Science et l'Hypothèse, 1901)*

*« Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir. »*

*(La Science et l'Hypothèse, 1901)*

*« La recherche de la vérité doit être le but de notre activité ;  
c'est la seule fin qui soit digne d'elle. » (La Valeur de la Science, 1905)*

**Etc.**

**Etc**

*« Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir. »*

*(La Science et l'Hypothèse, 1901)*

*« La recherche de la vérité doit être le but de notre activité ; c'est la seule fin qui soit digne d'elle. » (La Valeur de la Science, 1905)*

*« Le savant doit ordonner ; on fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison. »*

*(La Valeur de la Science)*

*« Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir. »*

*(La Science et l'Hypothèse, 1901)*

*« La recherche de la vérité doit être le but de notre activité ; c'est la seule fin qui soit digne d'elle. »* (La Valeur de la Science, 1905)

*« Le savant doit ordonner ; on fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison. »*

*(La Valeur de la Science)*

*« La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. »*

*(Science et Méthode, 1908)*

*« Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir. »*

*(La Science et l'Hypothèse, 1901)*

*« La recherche de la vérité doit être le but de notre activité ; c'est la seule fin qui soit digne d'elle. »* *(La Valeur de la Science, 1905)*

*« Le savant doit ordonner ; on fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison. »*

*(La Valeur de la Science)*

*« La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. »*

*(Science et Méthode, 1908)*

*« la faculté qui nous apprend à voir, c'est l'intuition. Sans elle, le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées. »*

*(Science et Méthode)*

« *Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.* »

*(La Science et l'Hypothèse, 1901)*

« *La recherche de la vérité doit être le but de notre activité ; c'est la seule fin qui soit digne d'elle.* » *(La Valeur de la Science, 1905)*

« *Le savant doit ordonner ; on fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.* »

*(La Valeur de la Science)*

« *La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.* »

*(Science et Méthode, 1908)*

« *la faculté qui nous apprend à voir, c'est l'intuition. Sans elle, le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées.* »

*(Science et Méthode)*

**Etc.**

**Etc**



# L'INTUITION : L'ÉPISODE DU MARCHEPIED



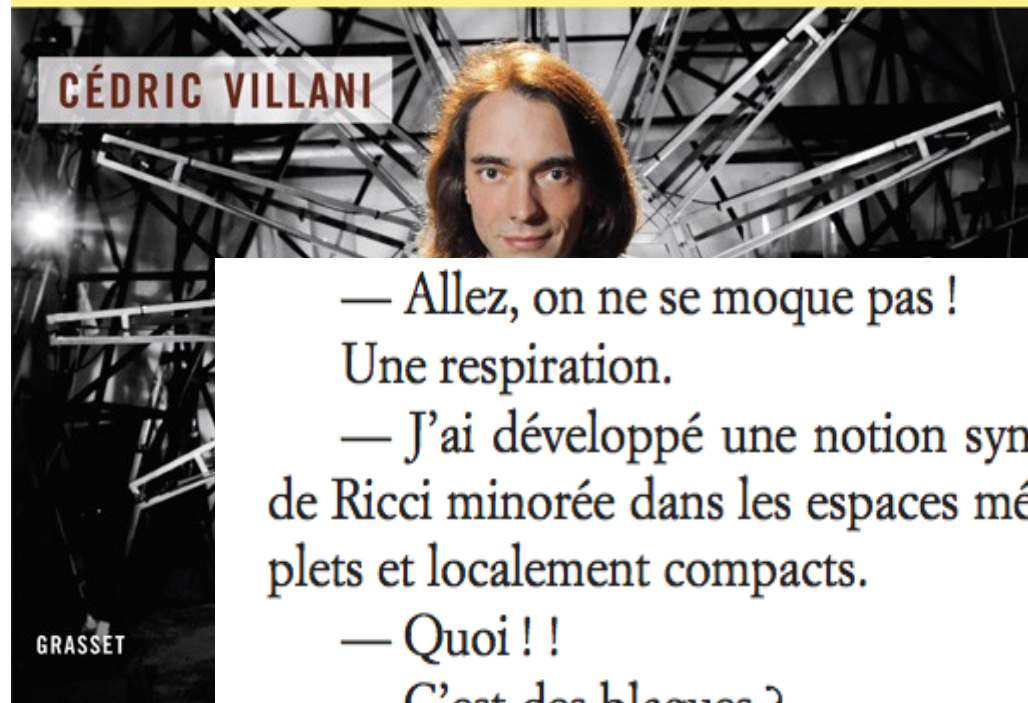
CÉDRIC VILLANI

# Théorème vivant



CÉDRIC VILLANI

# Théorème vivant



— Allez, on ne se moque pas !

Une respiration.

— J'ai développé une notion synthétique de courbure de Ricci minorée dans les espaces métriques mesurés complets et localement compacts.

— Quoi !!

— C'est des blagues ?

# LES ERREURS

Un premier fait doit nous étonner, ou plutôt devrait nous étonner, si nous n'y étions si habitués. **Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les Mathématiques ?** Si les Mathématiques n'invoquent que les règles de la Logique, celles qui sont acceptées par tous les esprits bien faits, (...) comment se fait-il qu'il y ait tant de personnes qui y soient totalement réfractaires ?

# LES ERREURS

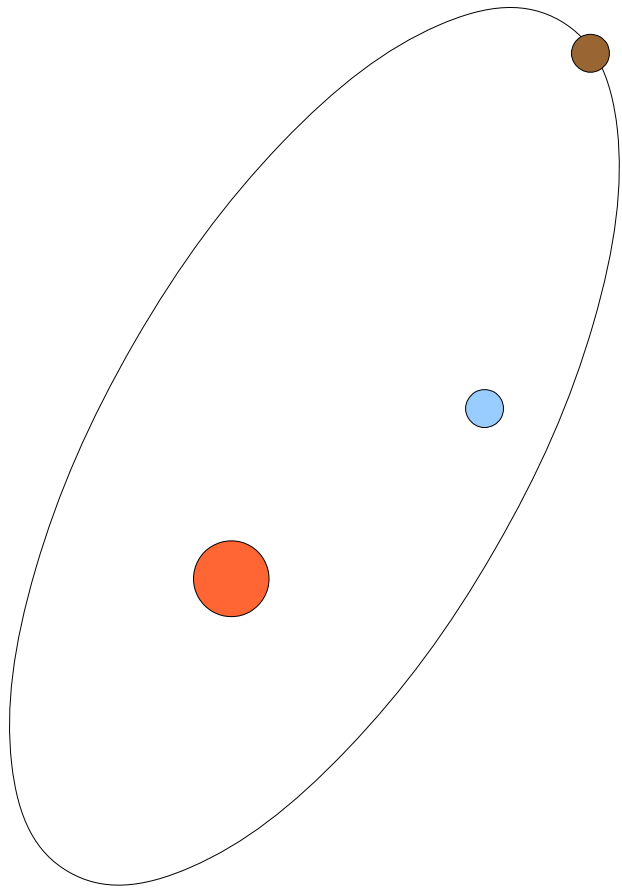
Un premier fait doit nous étonner, ou plutôt devrait nous étonner, si nous n'y étions si habitués. **Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les Mathématiques ?** Si les Mathématiques n'invoquent que les règles de la Logique, celles qui sont acceptées par tous les esprits bien faits, (...) comment se fait-il qu'il y ait tant de personnes qui y soient totalement réfractaires ?

(...) Et il y a plus ; **comment l'erreur est-elle possible en Mathématiques ?** (...) **Est-il nécessaire d'ajouter que les bons mathématiciens eux-mêmes ne sont pas infaillibles ?**

## UNE RETENTISSANTE ERREUR ... DE COMMUNICATION

*Non, il n'y a pas d'espace absolu ; ces deux propositions contradictoires : « la Terre tourne » et « la Terre ne tourne pas » ne sont donc pas cinématiquement plus vraies l'une que l'autre. Affirmer l'une, en niant l'autre, au sens cinématique, ce serait admettre l'existence de l'espace absolu.*

1887



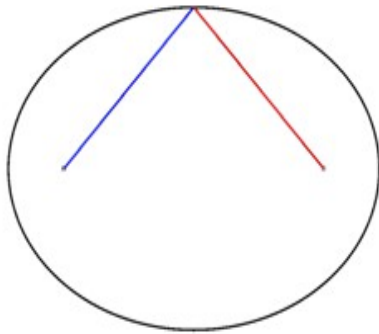
SUR LE  
PROBLÈME DES TROIS CORPS  
ET LES  
EQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR  
H. POINCARÉ

DEUXIÈME ÉDITION  
DU PRÉLÈVE DE S. M. LE BUI HONG II  
LE 2 OCTOBRE 1900

# KEPLER

Blue line length: (5.000)  
Red line length: (5.000)  
Total length: (10.00)

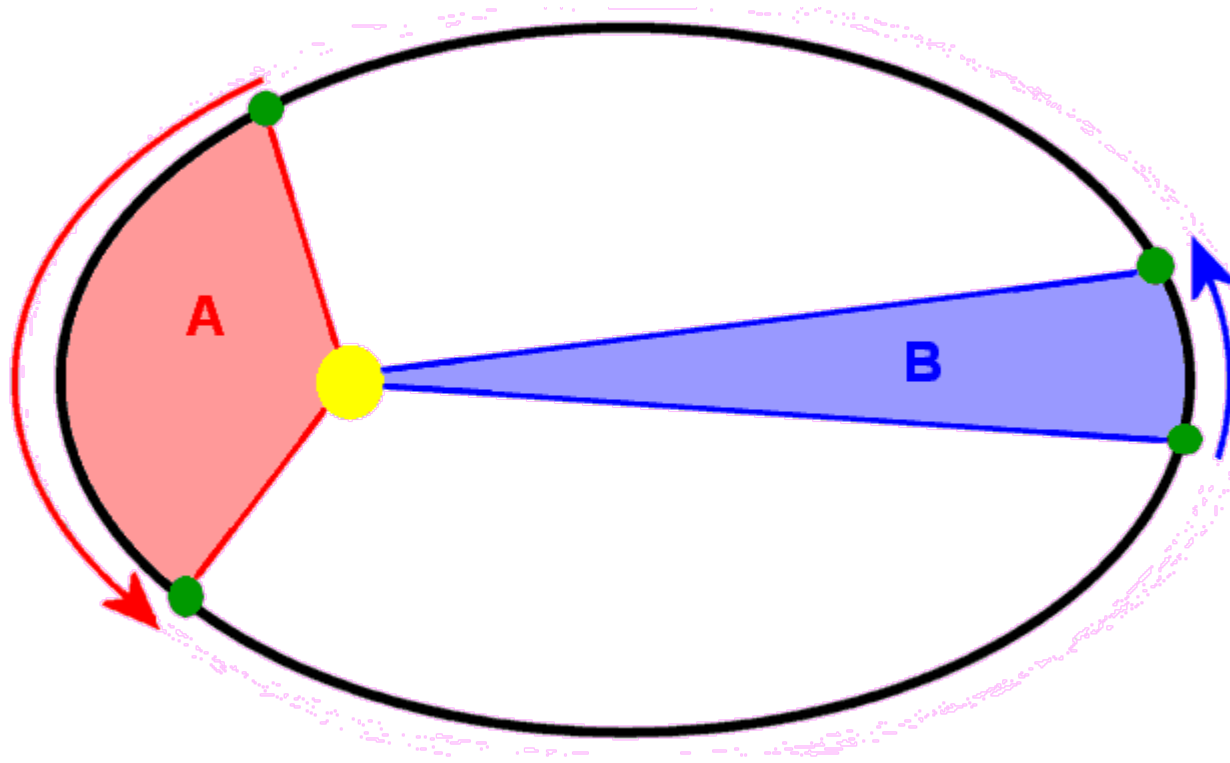


Orbites elliptiques,  
le Soleil est un foyer





## SECONDE LOI DE KEPLER



Les aires sont balayées uniformément

# TROISIÈME LOI DE KEPLER

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

Relation entre la période et le demi-grand axe

# TROISIÈME LOI DE KEPLER

## ANNÉES PLANÉTAIRES

Mercure	0,24
Vénus	0,61
Terre	1
Mars	1,9
Jupiter	12
Saturne	29
Uranus	84
Neptune	164
Pluton	248

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

## demi-axe

Me	0,4
V	0,7
T	1
Ma	1,5
J	5,2
S	9,5
U	19,6
N	30
P	39

Relation entre la période et le demi-grand axe

## Voltaire :

*« Kepler, qui trouva cette proportion, était bien loin d'en trouver la raison. Moins bon philosophe qu'astronome admirable, il dit que le soleil a une âme, non pas une âme intelligente, mais une âme végétante, agissante : qu'en tournant sur lui-même il attire à soi les planètes; mais que les planètes ne tombent pas dans le soleil, parce qu'elles font une révolution sur leur axe. En faisant cette révolution, dit-il, elles présentent au soleil tantôt un côté ami, tantôt un côté ennemi : le côté ennemi est repoussé; ce qui produit le cours annuel des planètes dans les ellipses.*

## Voltaire :

*« Kepler, qui trouva cette proportion, était bien loin d'en trouver la raison. Moins bon philosophe qu'astronome admirable, il dit que le soleil a une âme, non pas une âme intelligente, mais une âme végétante, agissante : qu'en tournant sur lui-même il attire à soi les planètes; mais que les planètes ne tombent pas dans le soleil, parce qu'elles font une révolution sur leur axe. En faisant cette révolution, dit-il, elles présentent au soleil tantôt un côté ami, tantôt un côté ennemi : le côté ennemi est repoussé; ce qui produit le cours annuel des planètes dans les ellipses.*

*Il faut avouer, pour l'humiliation de la philosophie, que c'est de ce raisonnement si peu philosophique, qu'il avait conclu que le soleil devait tourner sur son axe; l'erreur le conduisit par hasard à la vérité.*

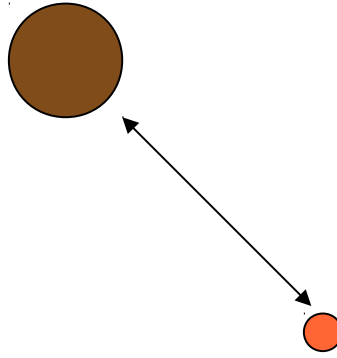
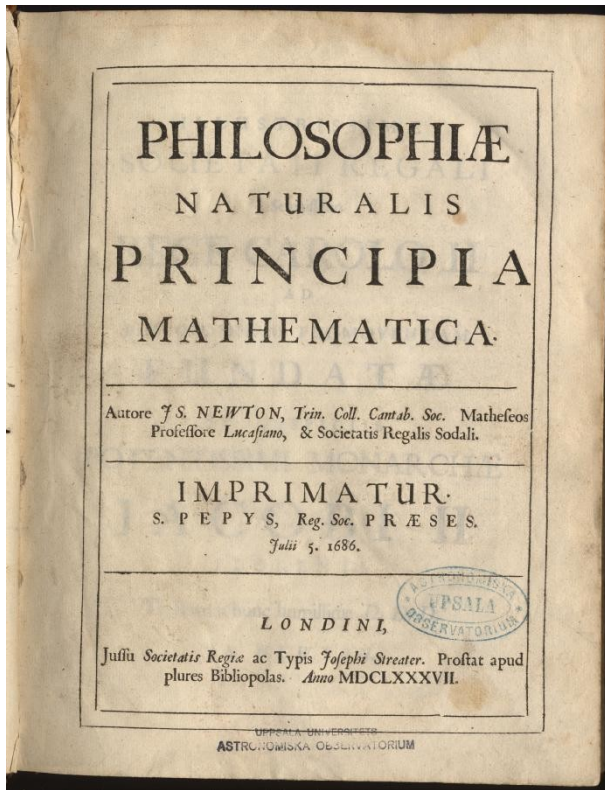
## Voltaire :

*« Kepler, qui trouva cette proportion, était bien loin d'en trouver la raison. Moins bon philosophe qu'astronome admirable, il dit que le soleil a une âme, non pas une âme intelligente, mais une âme végétante, agissante : qu'en tournant sur lui-même il attire à soi les planètes; mais que les planètes ne tombent pas dans le soleil, parce qu'elles font une révolution sur leur axe. En faisant cette révolution, dit-il, elles présentent au soleil tantôt un côté ami, tantôt un côté ennemi : le côté ennemi est repoussé; ce qui produit le cours annuel des planètes dans les ellipses.*

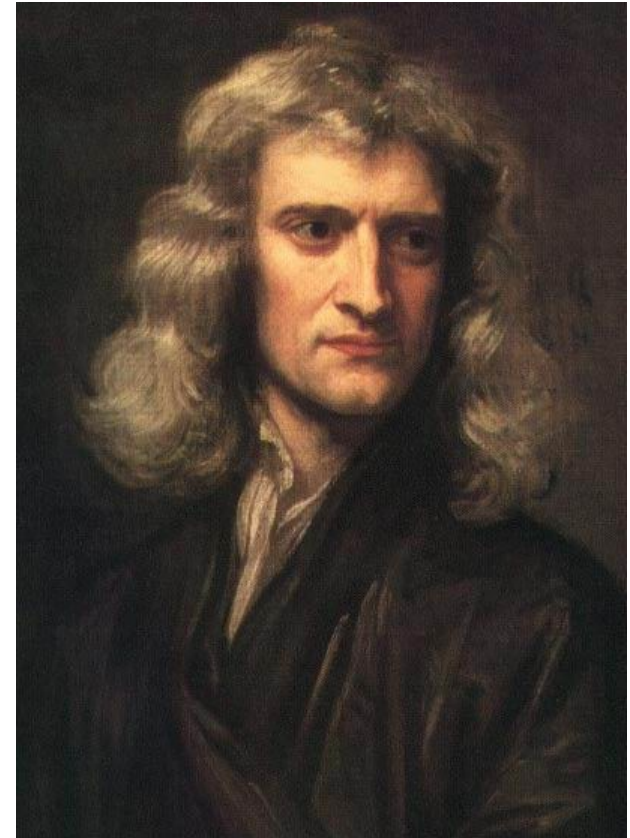
*Il faut avouer, pour l'humiliation de la philosophie, que c'est de ce raisonnement si peu philosophique, qu'il avait conclu que le soleil devait tourner sur son axe; l'erreur le conduisit par hasard à la vérité.*

*Kepler ajoute (...) que la masse du soleil, la masse de tout l'éther, & la masse des sphères des étoiles fixes, sont parfaitement égales; & que ce sont les trois symboles de la Très-Sainte Trinité. »*

# Loi de la gravitation universelle

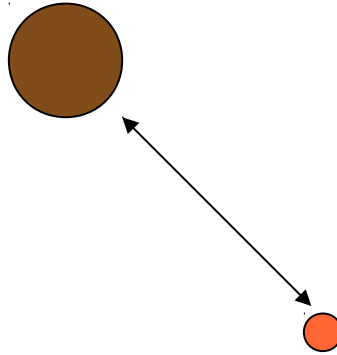
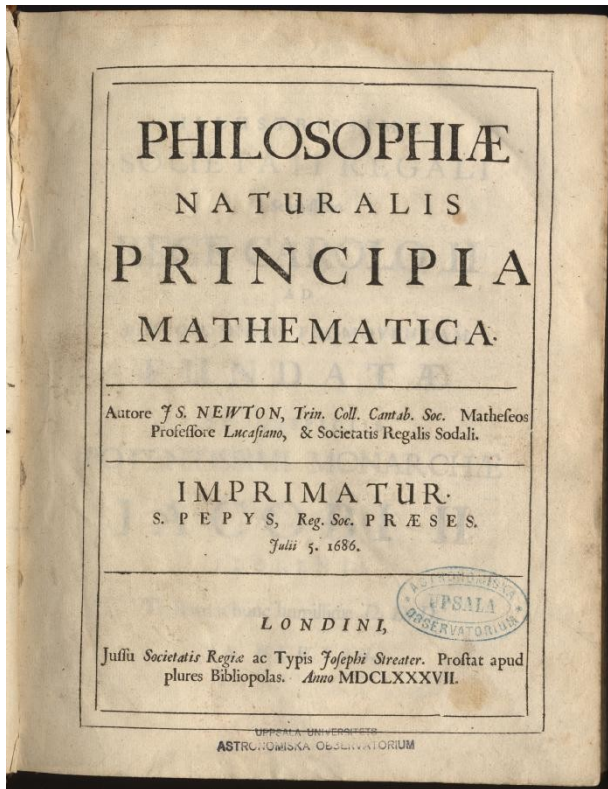


$$F = \frac{G M m}{r^2}$$

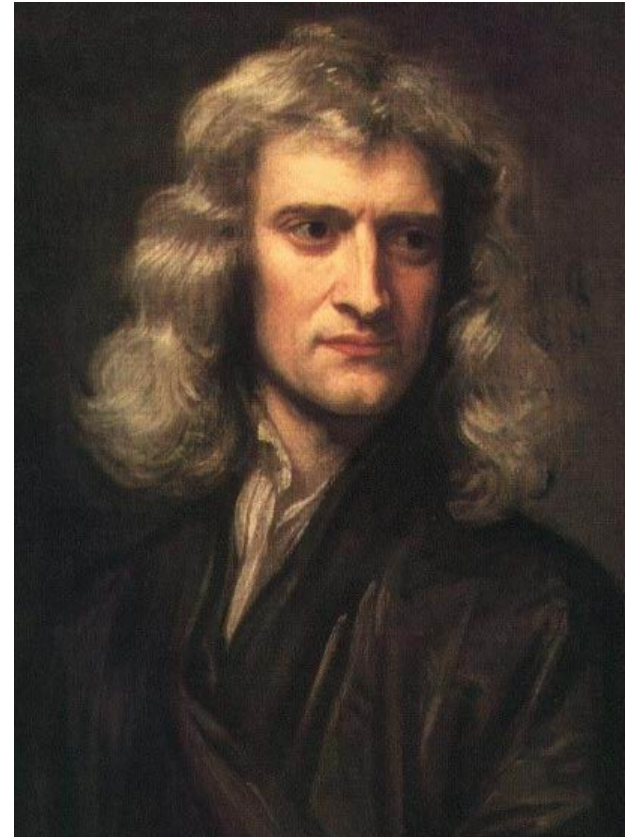


$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3} \quad i = 1, 2 \dots N$$

# Loi de la gravitation universelle



$$F = \frac{G M m}{r^2}$$



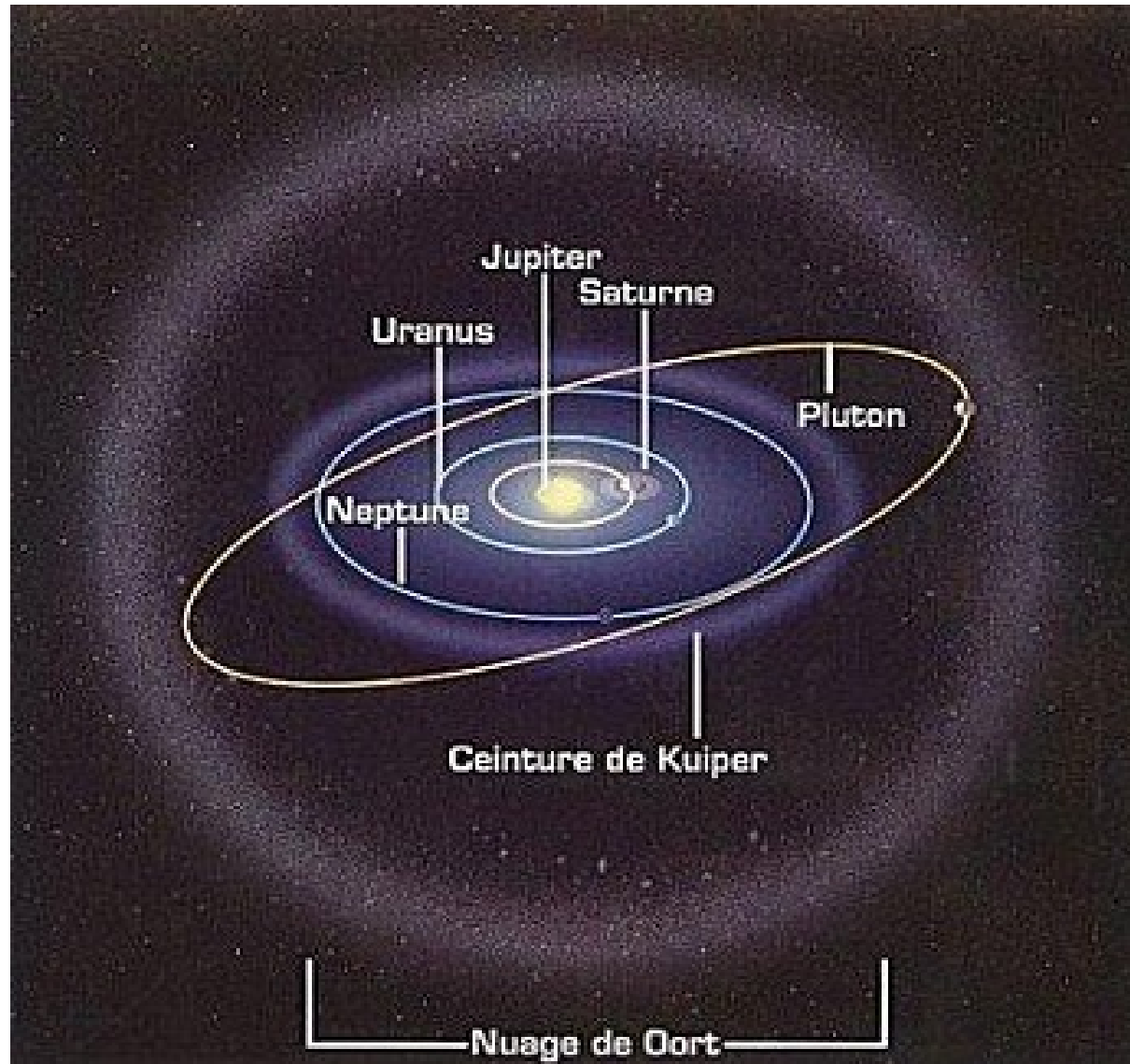
2 corps  $\longrightarrow$  on retrouve Kepler

Dès qu'il y a 3 corps ou plus, pas de solution « explicite » !

Aucune loi n'interdit les événements catastrophiques...



# Stabilité du système solaire ?



Earth



Venus



Mars



Mercury



Pluto



Jupiter

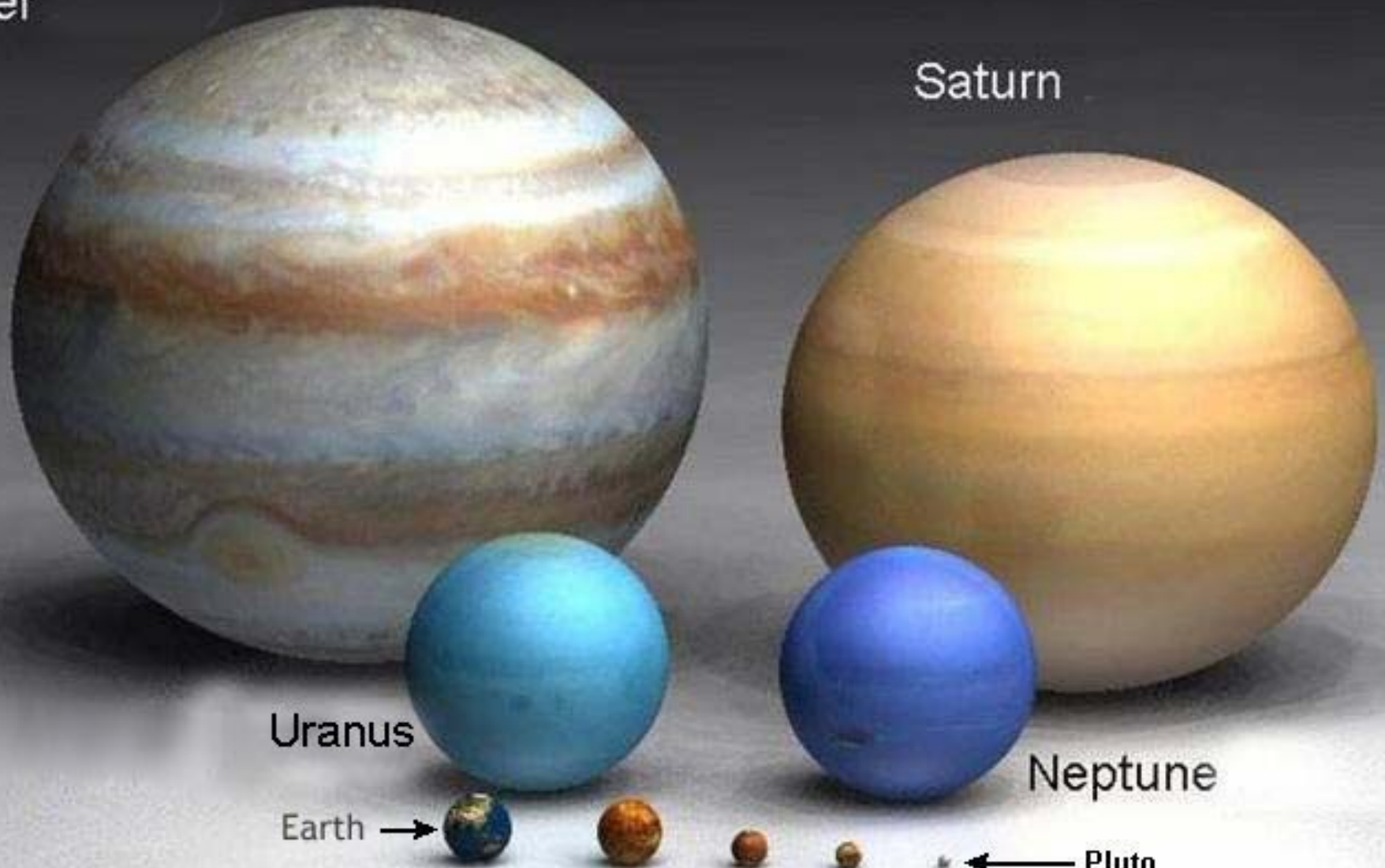
Saturn

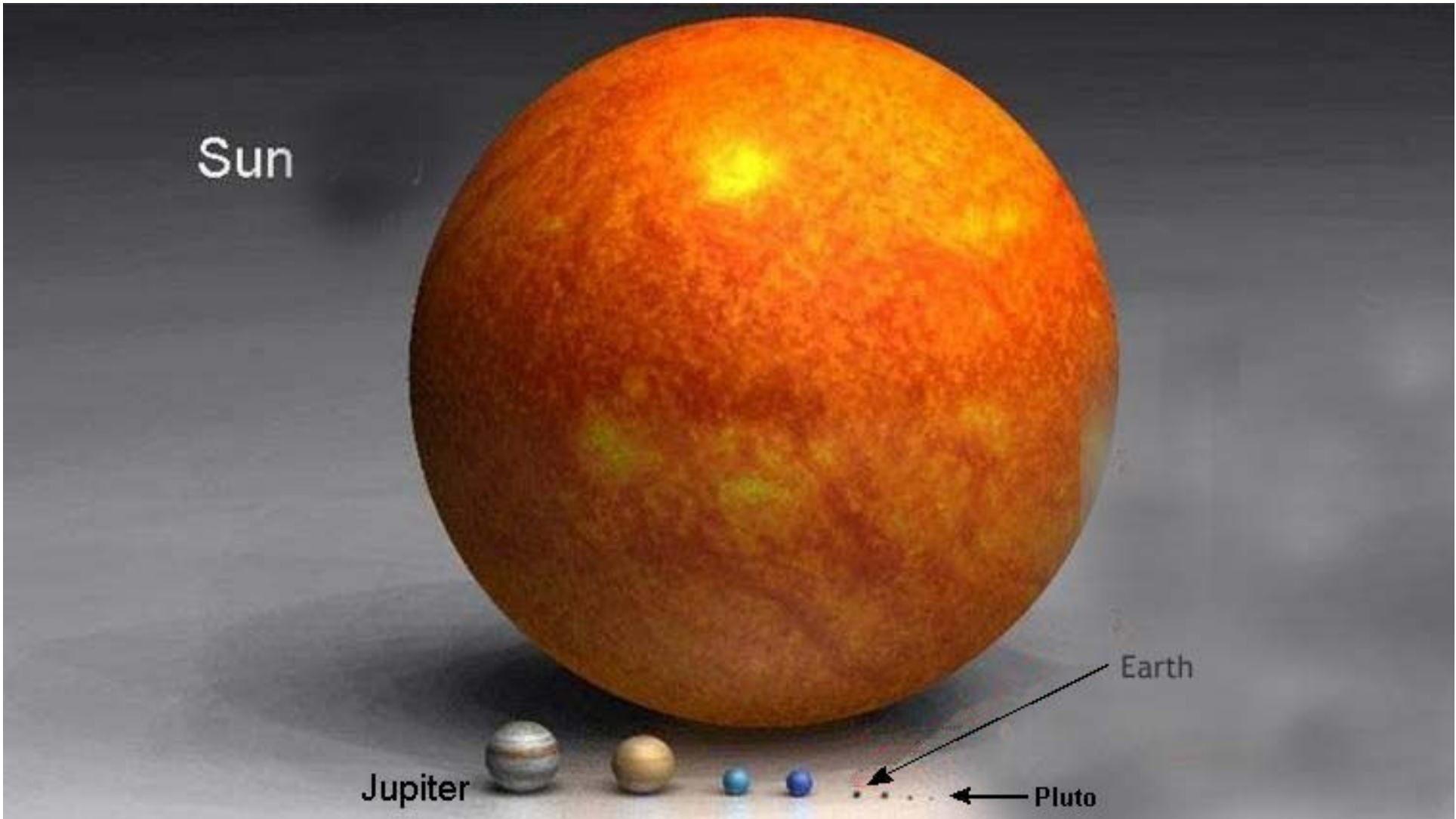
Uranus

Neptune

Earth

Pluto





## Qu'en pense Newton ?

*« Le sort aveugle ne pourrait jamais faire se mouvoir les Planètes toutes semblablement dans des Orbes concentriques, à quelques erreurs minimales près, qui auraient pu provenir des Actions mutuelles des Planètes l'une sur l'autre, et qui sont destinées à augmenter, jusqu'à ce que ce système ait besoin d'une reformation. »*

# STABILITÉ ?

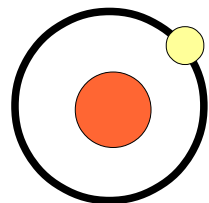
## LAGRANGE, LAPLACE & GAUSS

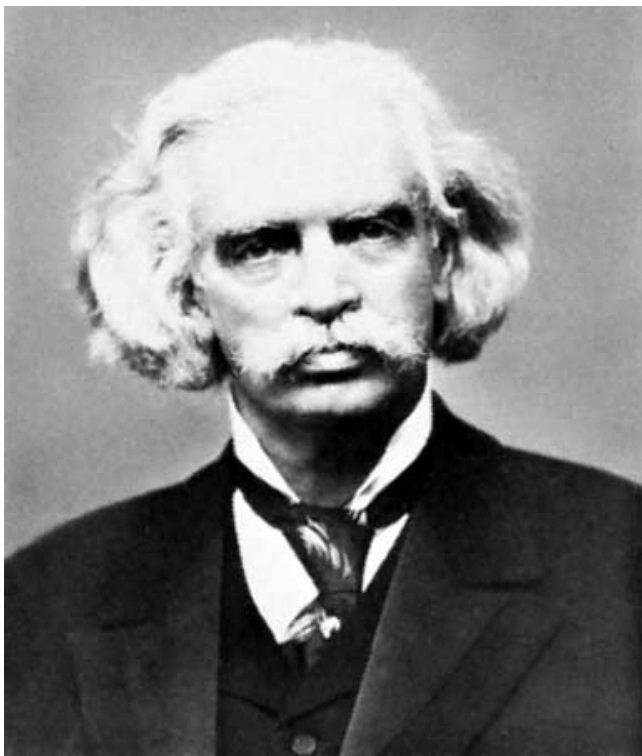
Inventent les méthodes perturbatives

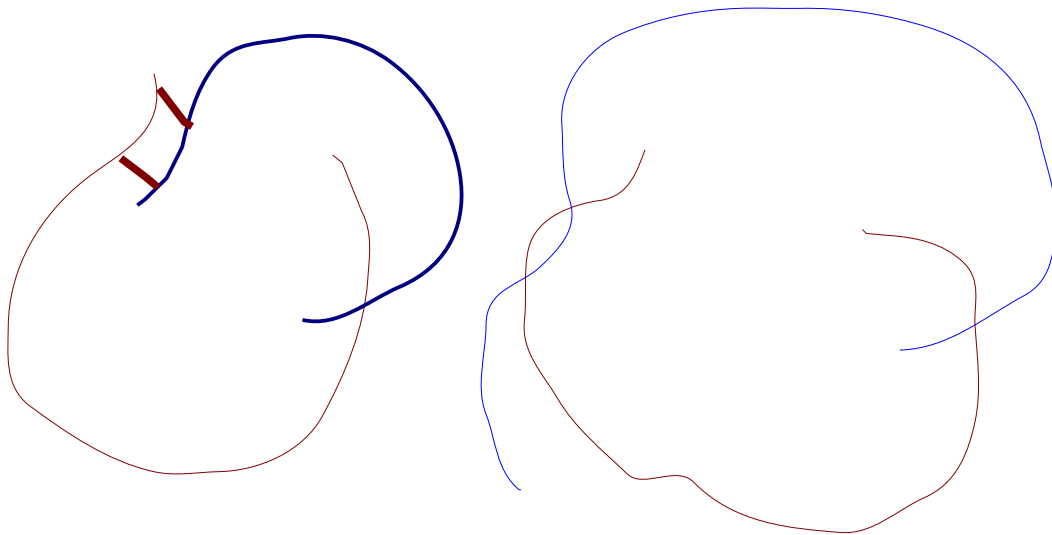
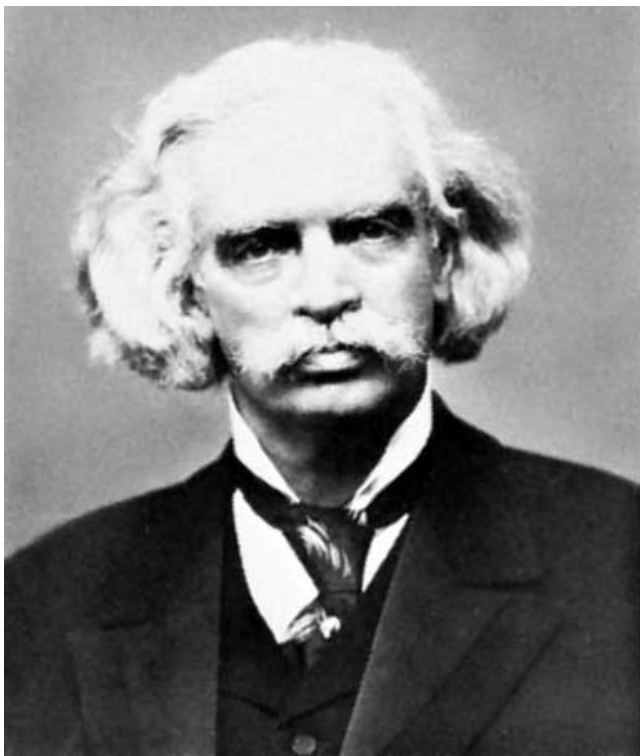
Prédissent stabilité : invariance des grands axes  
échelle de temps bien plus grande qu'attendu :  $1/\varepsilon^2$

(À l'encontre des observations sur plusieurs siècles)

Confirment la loi de Newton et théorisent le  
Déterminisme « laplacien »

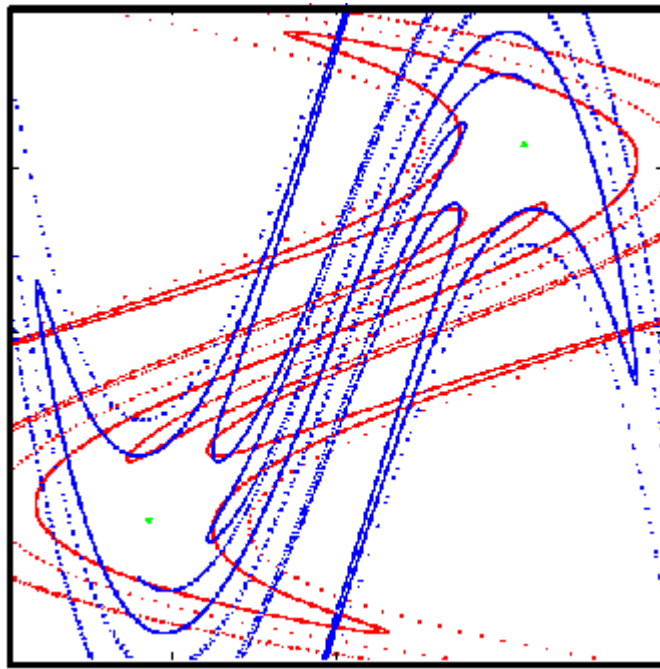






Découverte des **intersections homoclines**



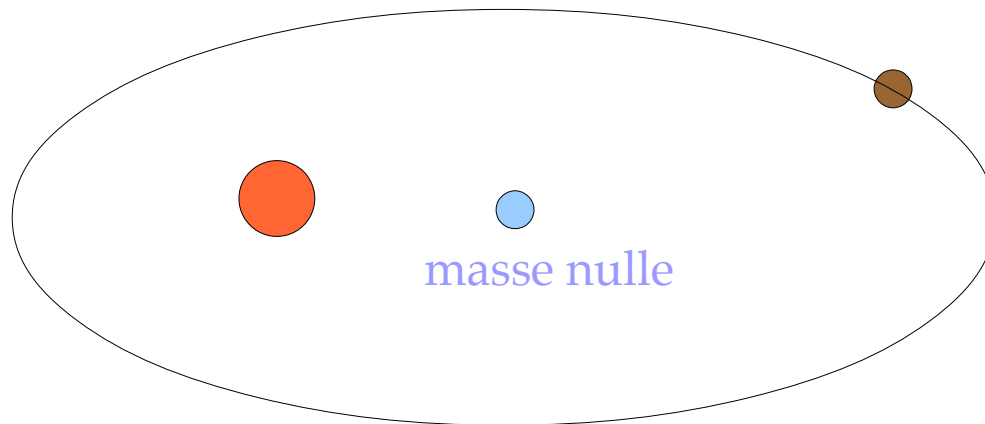


*« Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. »*

# INSTABILITÉ ?

## POINCARÉ

étudie le **problème restreint des trois corps**



Il met en évidence des trajectoires extrêmement instables, imprédictibles sur de grands temps – c'est la naissance de la **théorie du chaos** (avec Jacques Hadamard)

## ÉPILOGUE ?

La théorie du système solaire chaotique est abandonnée dans les années 50-60 sous l'influence de Kolmogorov... MAIS...

Années 1980 : Laskar, Tremaine et d'autres se lancent dans la course à la **simulation numérique** sur des (dizaines de) millions d'années; d'abord pour des astéroïdes puis pour le système complet

**Jacques Laskar** écrit un système perturbatif ``simplifié'' de **150 000 termes**, polynôme de degré 5 en 16 variables (!) décrivant l'évolution des orbites « keplériennes »...



## ÉPILOGUE ?

La théorie du système solaire chaotique est abandonnée dans les années 50-60 sous l'influence de Kolmogorov... MAIS...

Années 1980 : Laskar, Tremaine et d'autres se lancent dans la course à la **simulation numérique** sur des (dizaines de) millions d'années; d'abord pour des astéroïdes puis pour le système complet

**Jacques Laskar** écrit un système perturbatif ``simplifié'' de **150 000 termes**, polynôme de degré 5 en 16 variables (!) décrivant l'évolution des orbites « keplériennes »...

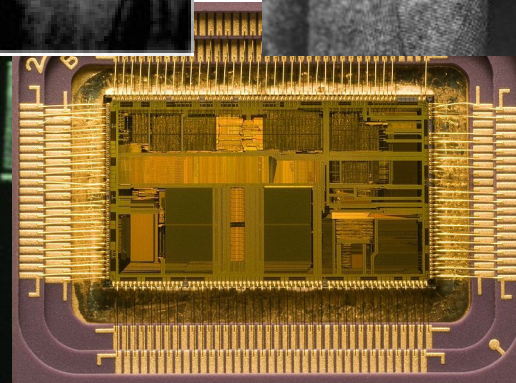
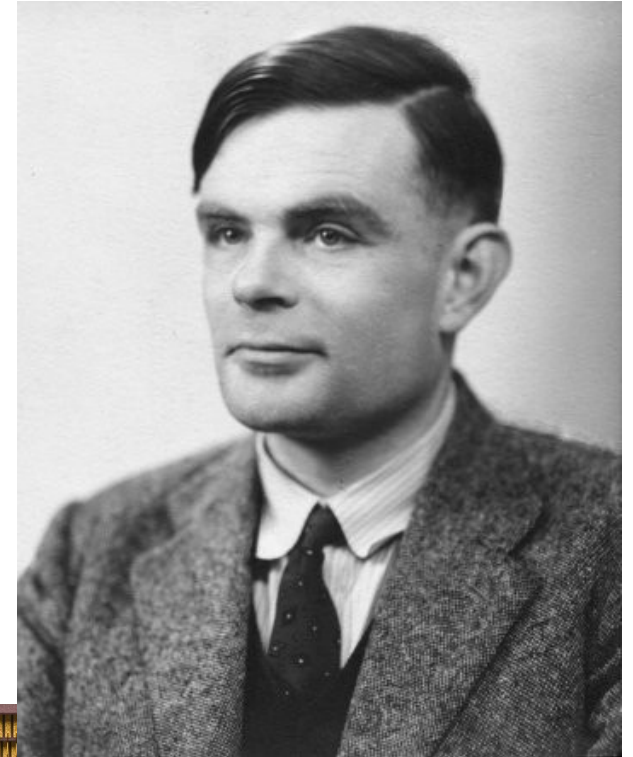
... Système peu prédictible au-delà de 10 MA, imprédictible au-delà de 60 MA !

$$d(t) = d_0 10^{t/10}$$

Statistiques ...



# Pilier technologique : les ordinateurs ...



# Pilier conceptuel : le chaos et le hasard

*C'est grâce au hasard, c'est-à-dire grâce à notre ignorance que nous pouvons conclure ; (...)*

*Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste.*

*H. Poincaré, Science et Méthode*

# **ATTRACTEUR DE LORENZ**

# Pilier conceptuel : le chaos et le hasard

*C'est grâce au hasard, c'est-à-dire grâce à notre ignorance que nous pouvons conclure ; (...)*

*Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste.*

*H. Poincaré, Science et Méthode*

*« J'avance l'idée qu'au fil des années les petites perturbations **ne modifient pas la fréquence** d'apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu'ils peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent. »*

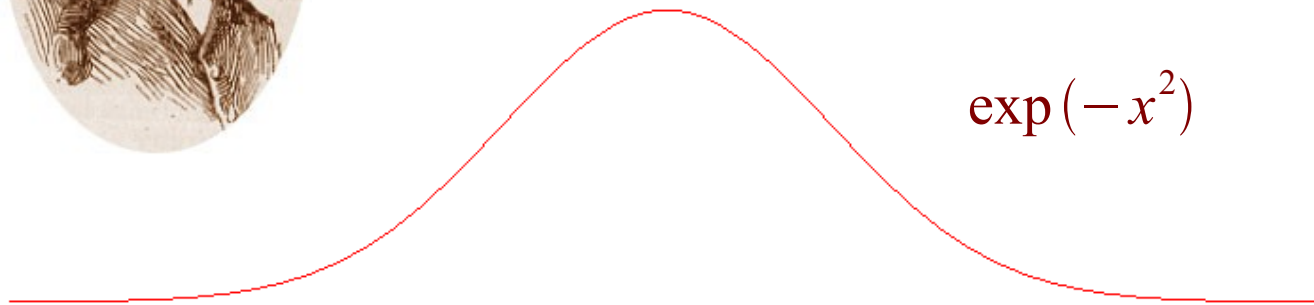
*E. Lorenz*



# Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne



$$\exp(-x^2)$$

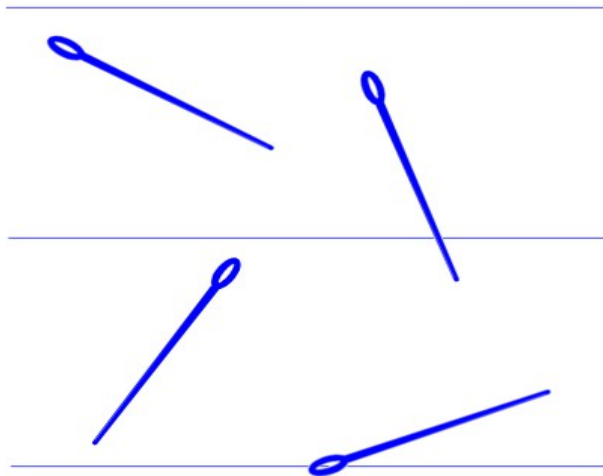
# Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

$$p = \frac{2}{\pi}$$



# Le hasard lentement apprivoisé

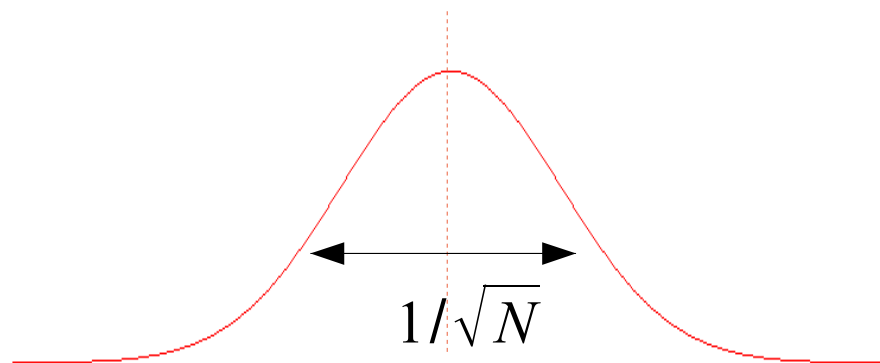
Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

Karl Friedrich **Gauss** (~ 1809) : moindres carrés gaussiens

Pierre-Simon de **Laplace** (1810) : loi des erreurs



La moyenne statistique d'un grand nombre de tirages aléatoires présente des **fluctuations** « **gaussiennes** »



# Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

Karl Friedrich **Gauss** (~ 1809) : moindres carrés gaussiens

Pierre-Simon de **Laplace** (1810) : loi des erreurs

Adolphe **Quetelet** (1846) : popularise la  
«loi des causes accidentelles »



# Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Loi des grands nombres



# Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

Karl Friedrich **Gauss** (~ 1809) : moindres carrés gaussiens

Pierre-Simon de **Laplace** (1810) : loi des erreurs

Adolphe **Quetelet** (1846) : popularise la «loi des causes accidentelles »

Joseph **Bertrand** (1888) : « courbe de Gauss »



# Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

Karl Friedrich **Gauss** (~ 1809) : moindres carrés gaussiens

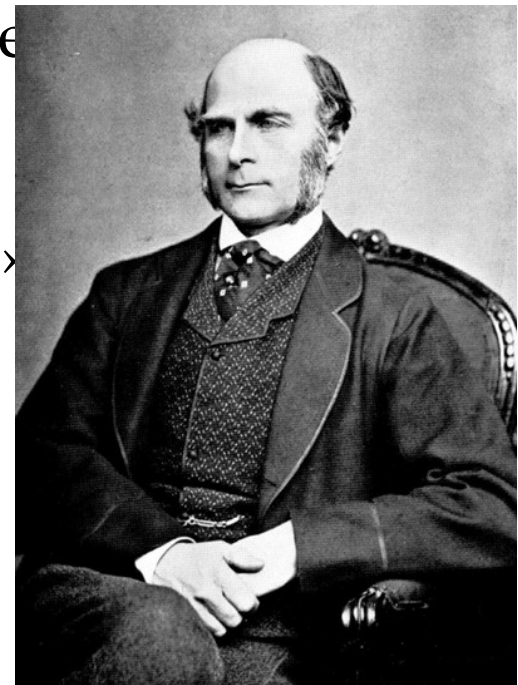
Pierre-Simon de **Laplace** (1810) : loi des erreurs

Adolphe **Quetelet** (1846) : popularise la «loi des causes»

Joseph **Bertrand** (1888) : « courbe de Gauss »

Francis **Galton** (1889) : « loi suprême de la déraison »

I know of scarcely anything so apt to impress the imagination as the wonderful form of cosmic order expressed by the "Law of Frequency of Error." **The law would have been personified by the Greeks and deified, if they had known of it.** It reigns with serenity and in complete self-effacement, amidst the wildest confusion. The huger the mob, and the greater the apparent anarchy, the more perfect is its sway. It is the supreme law of Unreason. Whenever a large sample of chaotic elements are taken in hand and marshaled in the order of their magnitude, an unsuspected and most beautiful form of regularity proves to have been latent all along.



# Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

Karl Friedrich **Gauss** (~ 1809) : moindres carrés gaussiens

Pierre-Simon de **Laplace** (1810) : loi des erreurs

Adolphe **Quetelet** (1846) : popularise la «loi des causes accidentelles »

Joseph **Bertrand** (1888) : « courbe de Gauss »

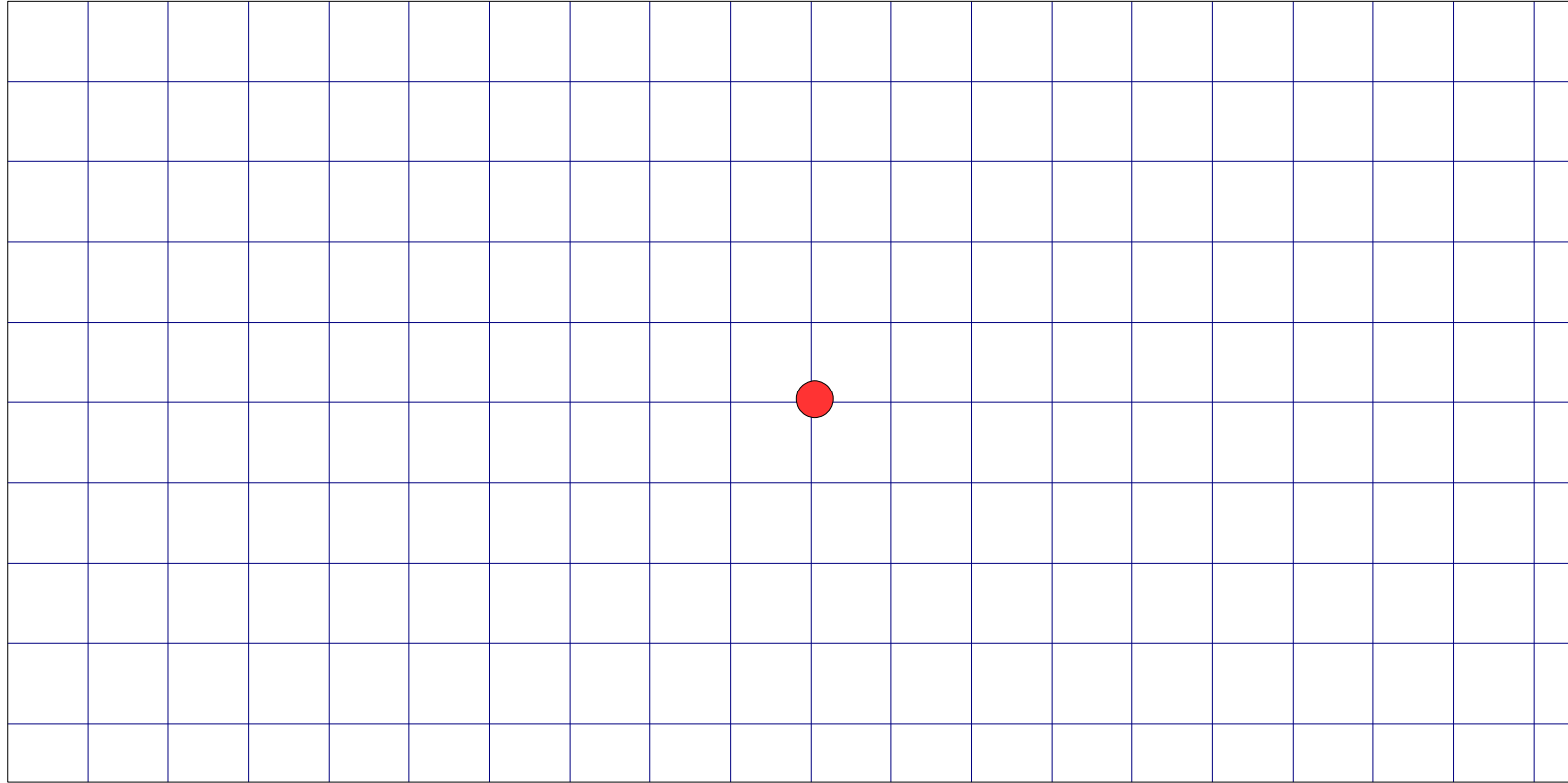
Francis **Galton** (1889) : « loi suprême de la déraison »

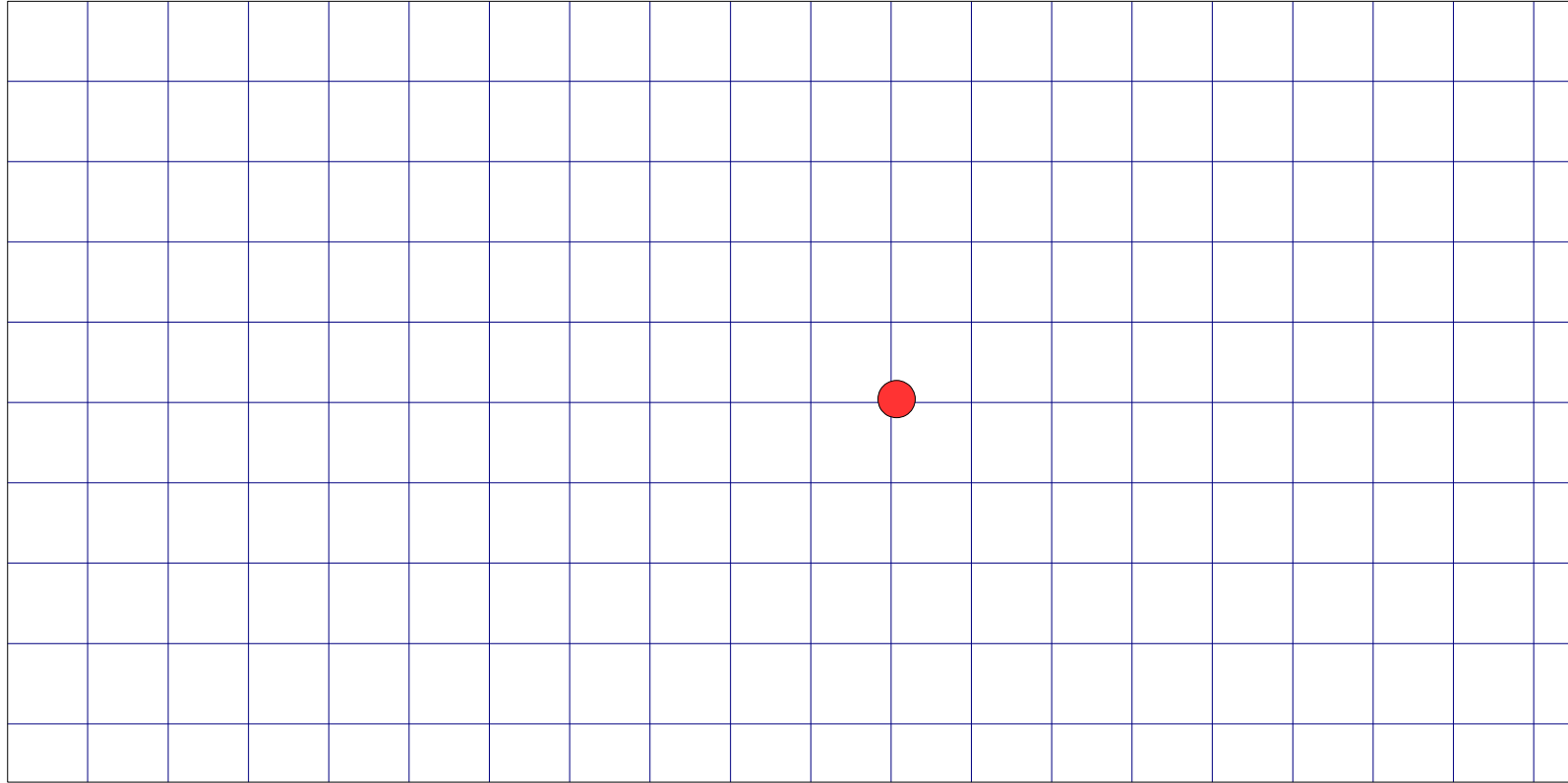
George **Pólya** (1921) : marches aléatoires



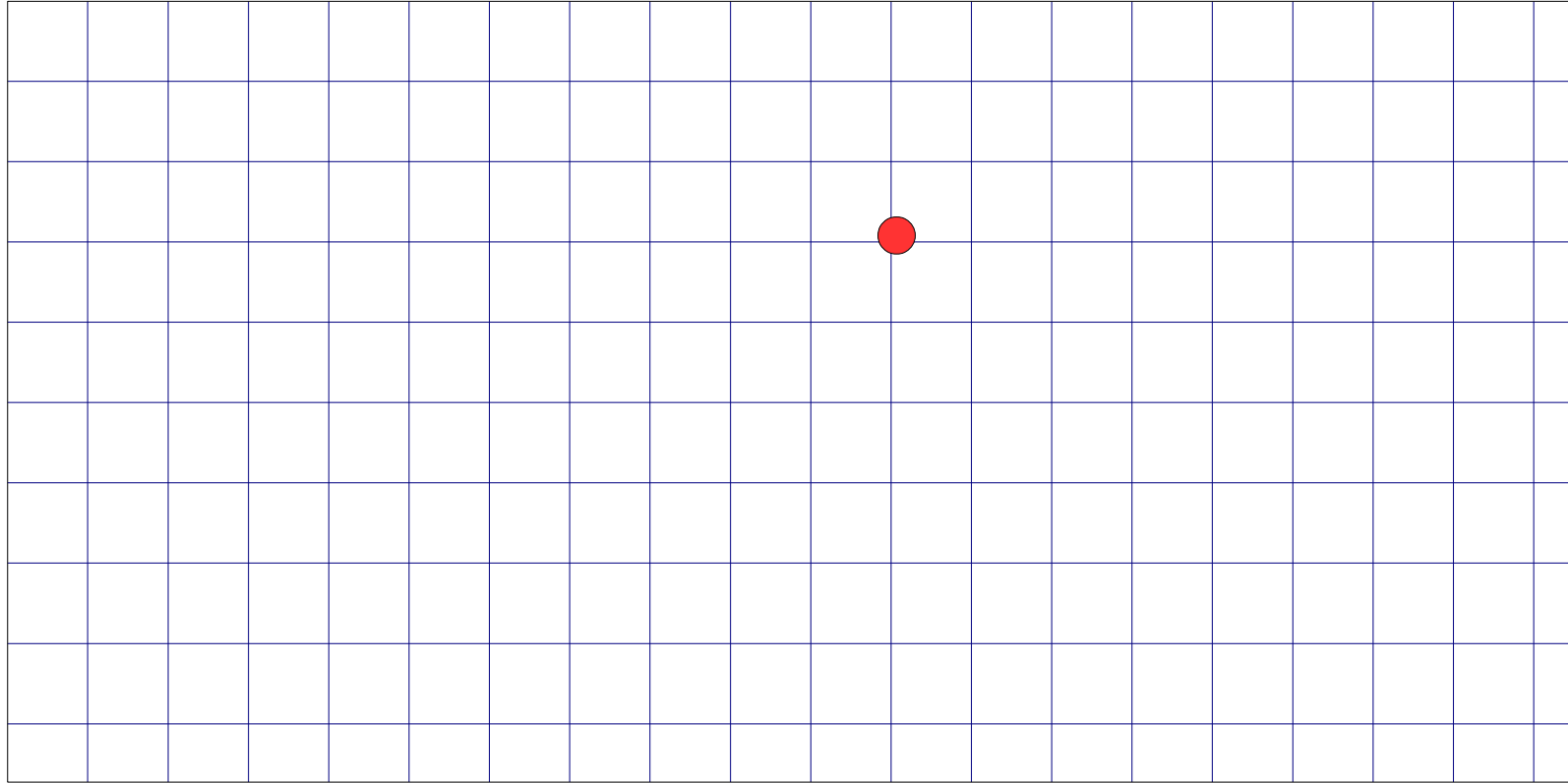


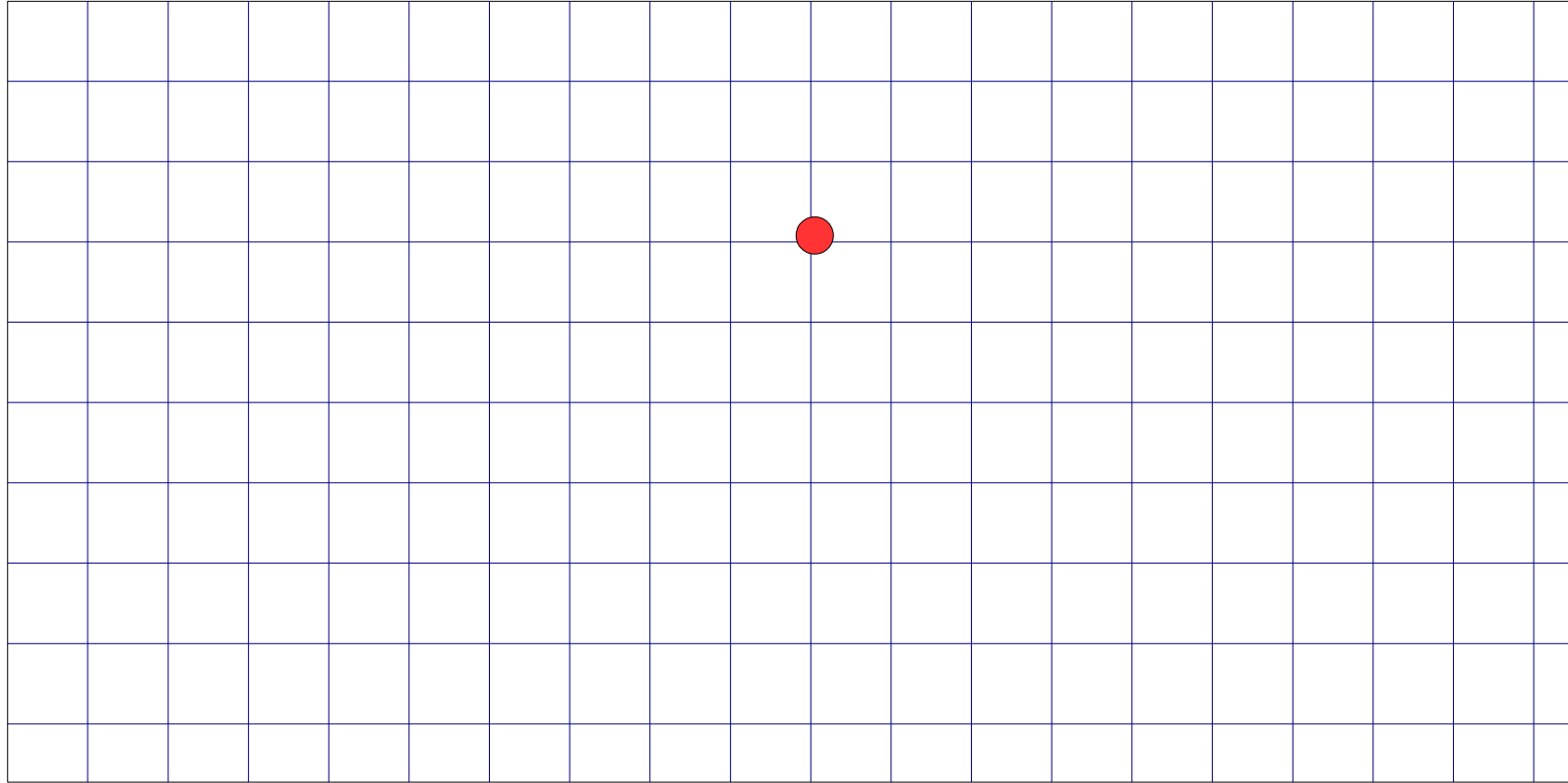


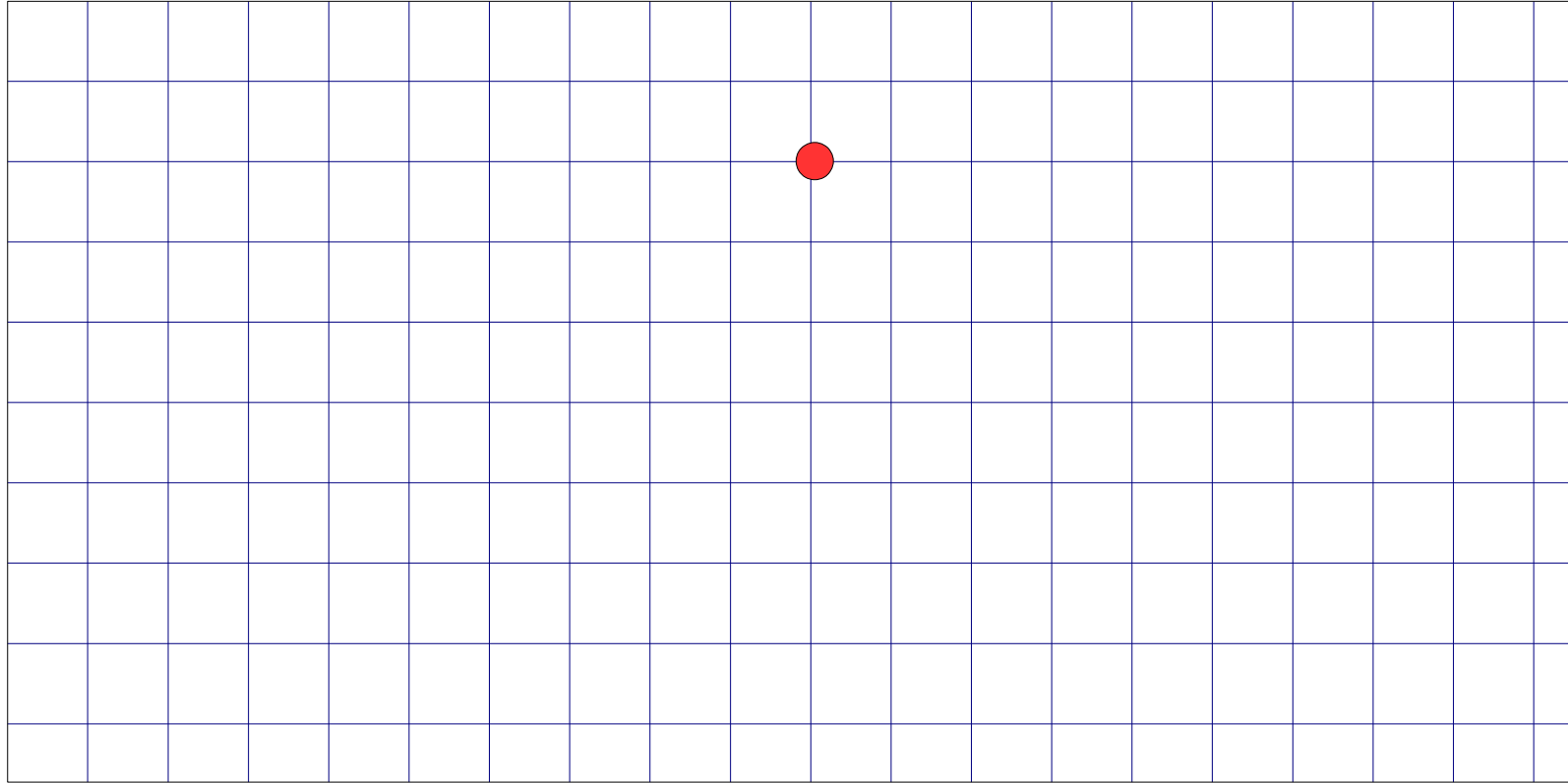






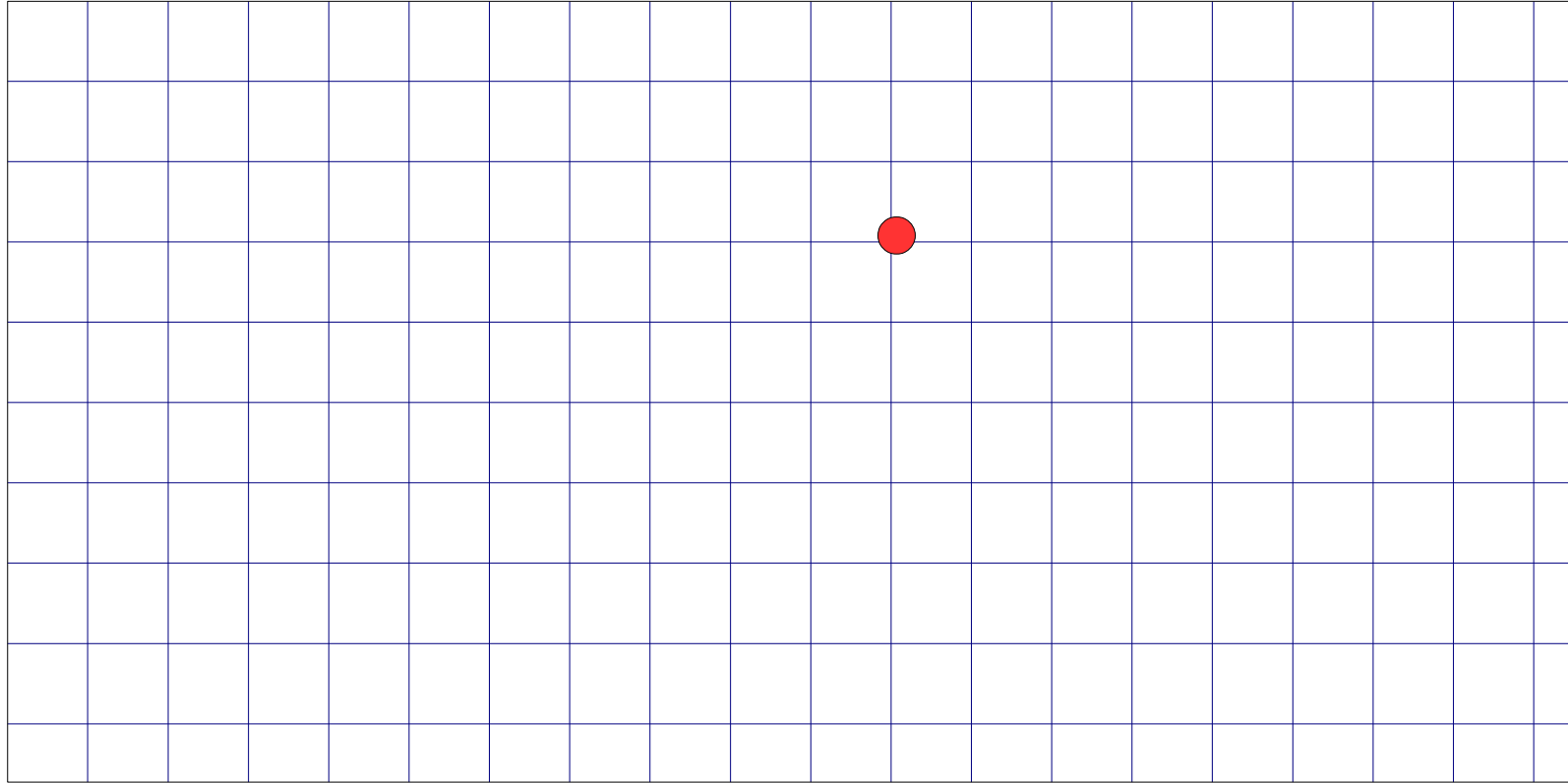










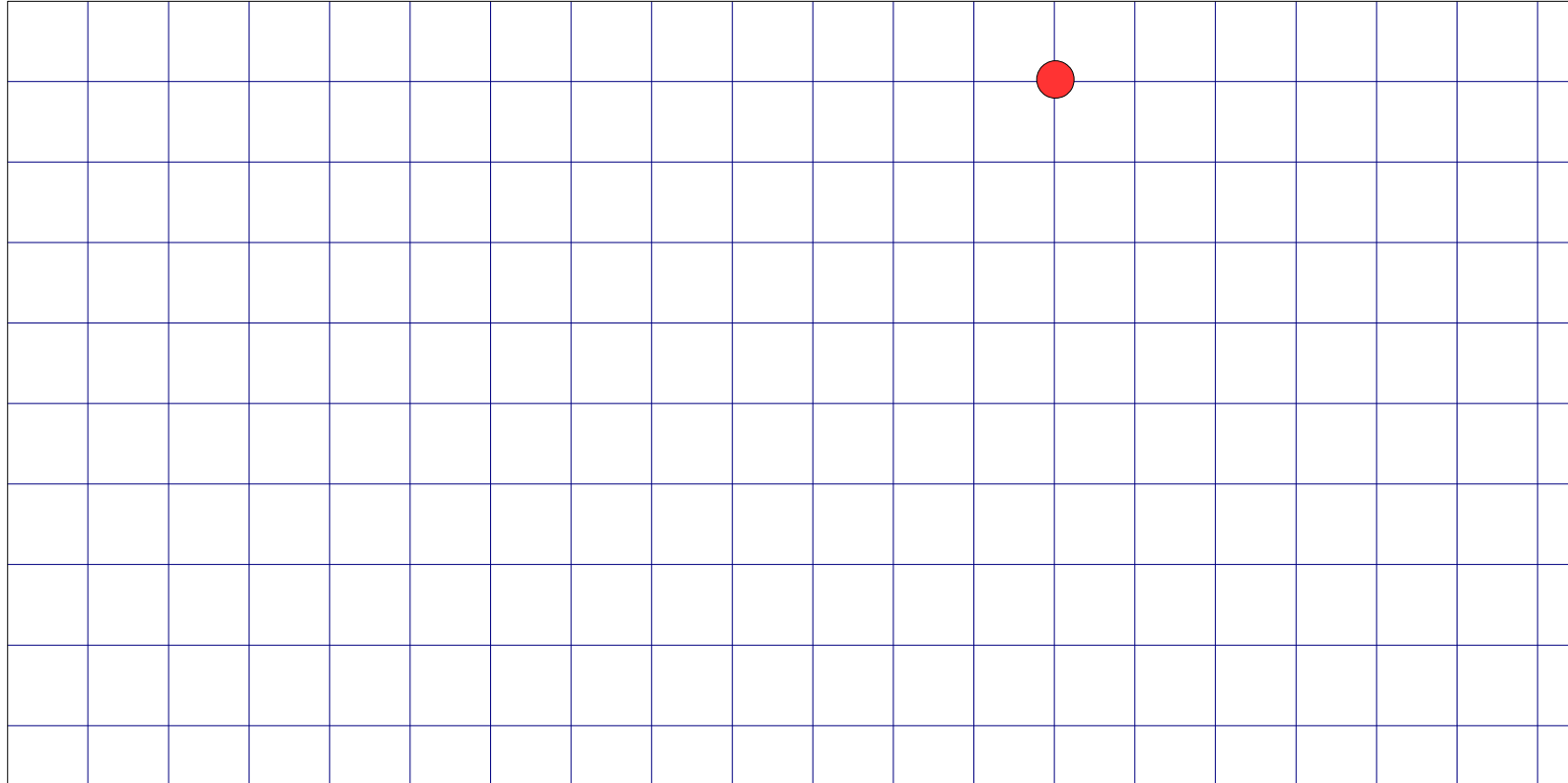




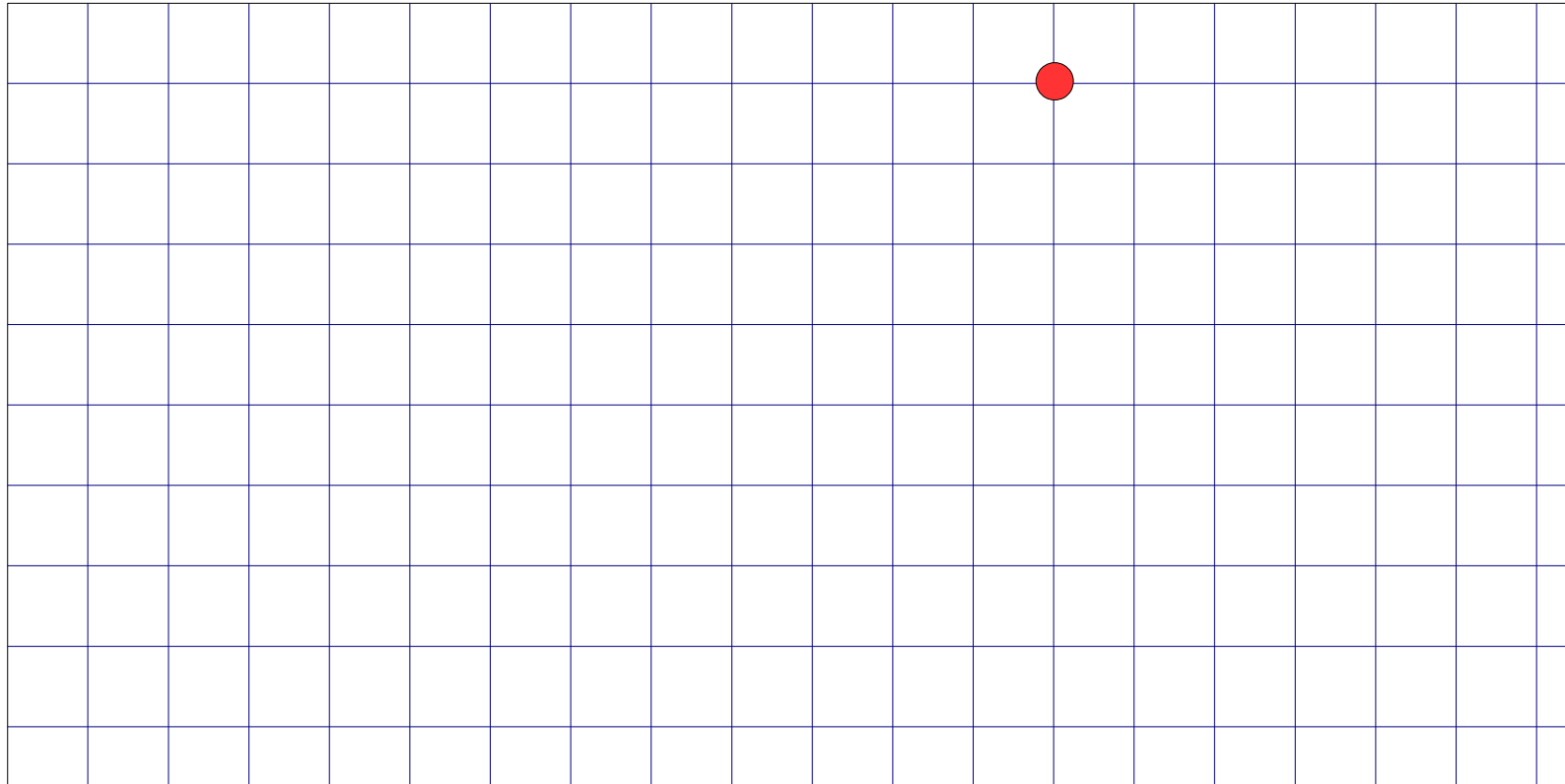








On **prouve** que le marcheur revient **toujours** (proba 1)  
au point de départ.



On **prouve** que le marcheur revient **toujours** (proba 1)  
au point de départ.

Ceci n'est pas vrai en dimension 3 : probabilité environ 0,34.

# Révolution conceptuelle 1865-1875



Physique statistique et Irréversibilité



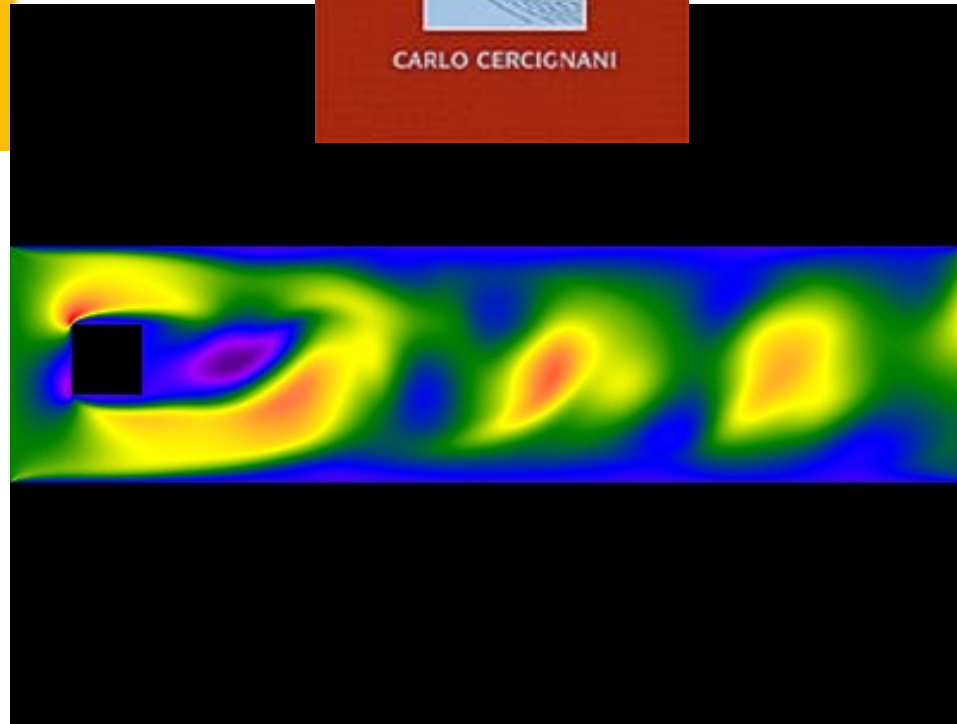
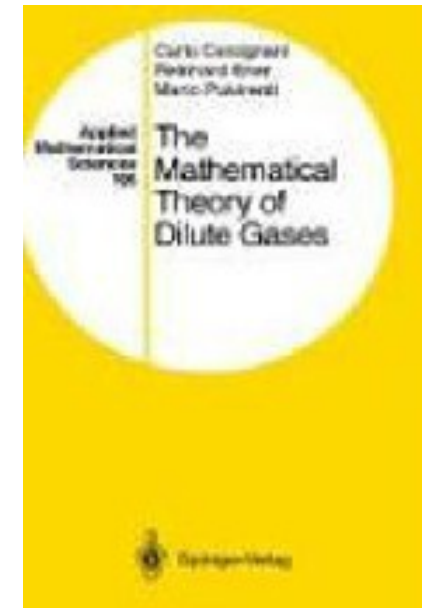
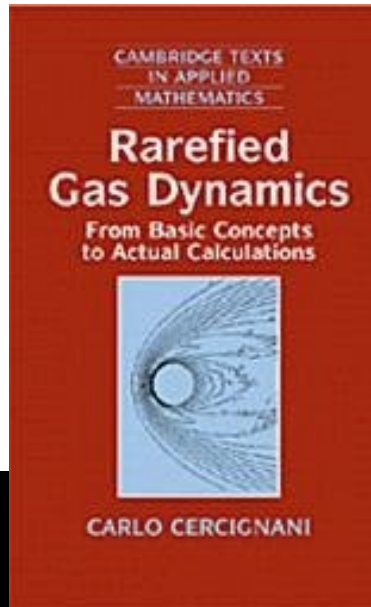
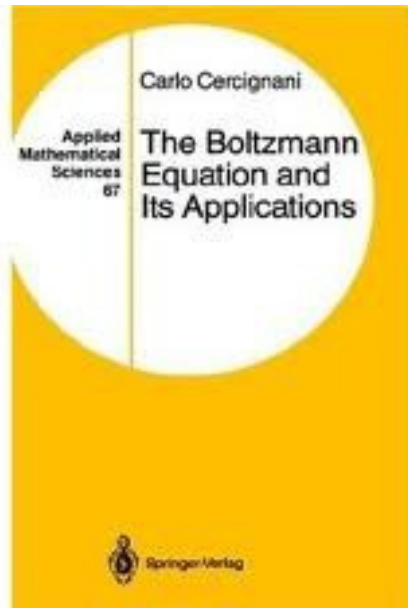
# Révolution conceptuelle 1865-1875

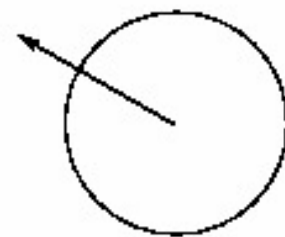
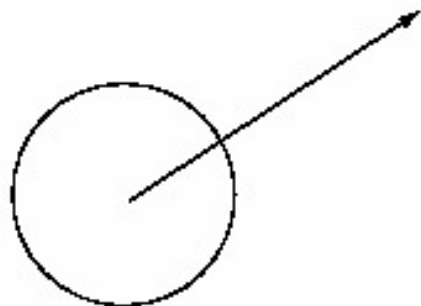
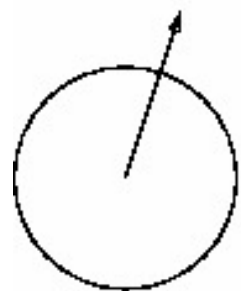
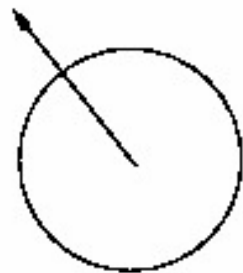
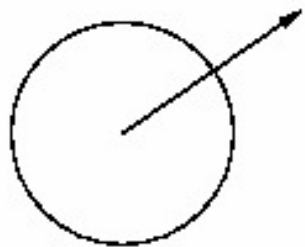
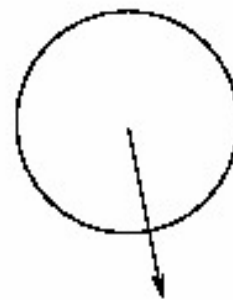
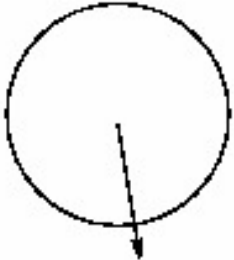
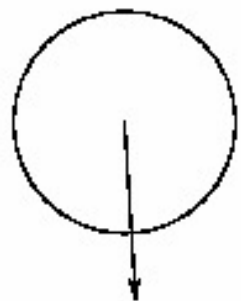


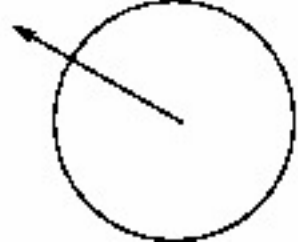
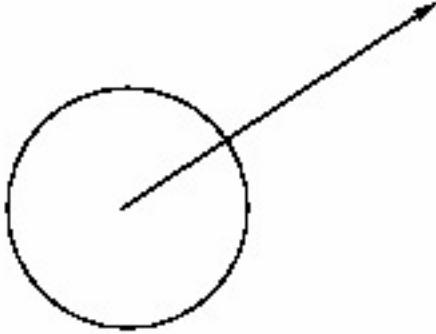
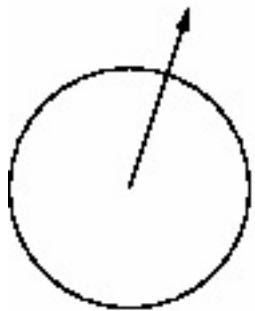
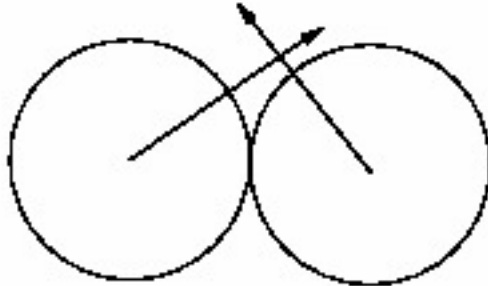
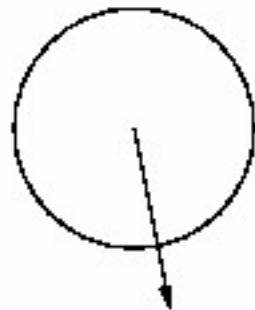
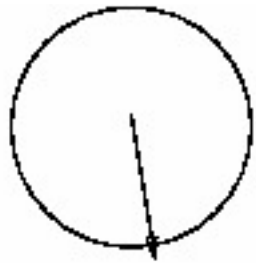
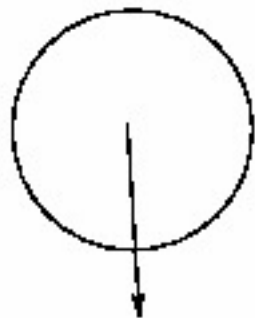
Physique statistique et Irréversibilité

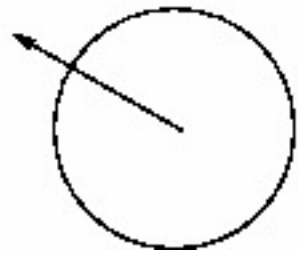
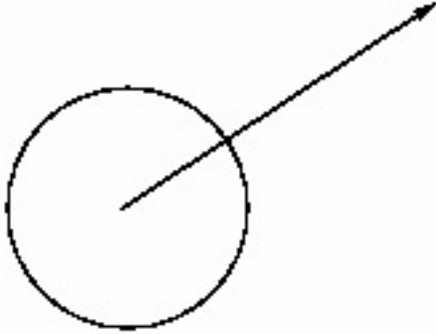
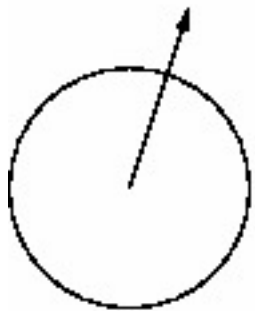
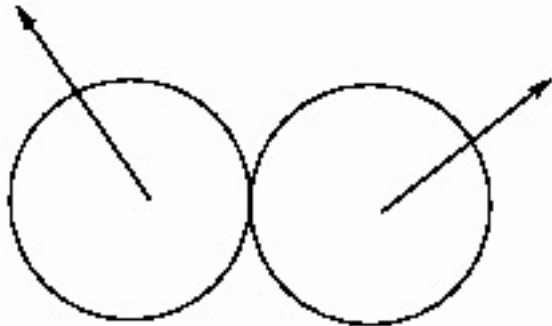
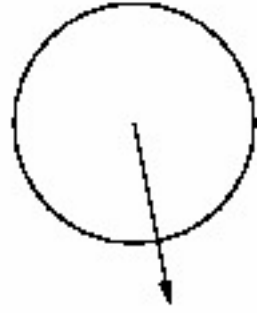
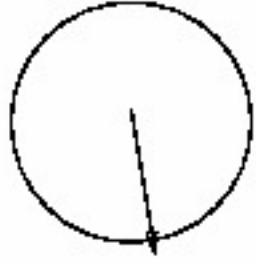
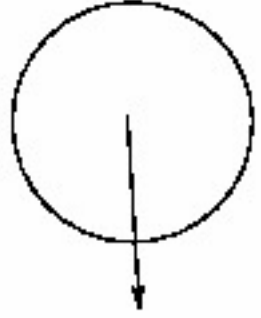
# L'équation de Boltzmann

Modélise les gaz raréfiés sous l'hypothèse de **chaos moléculaire**









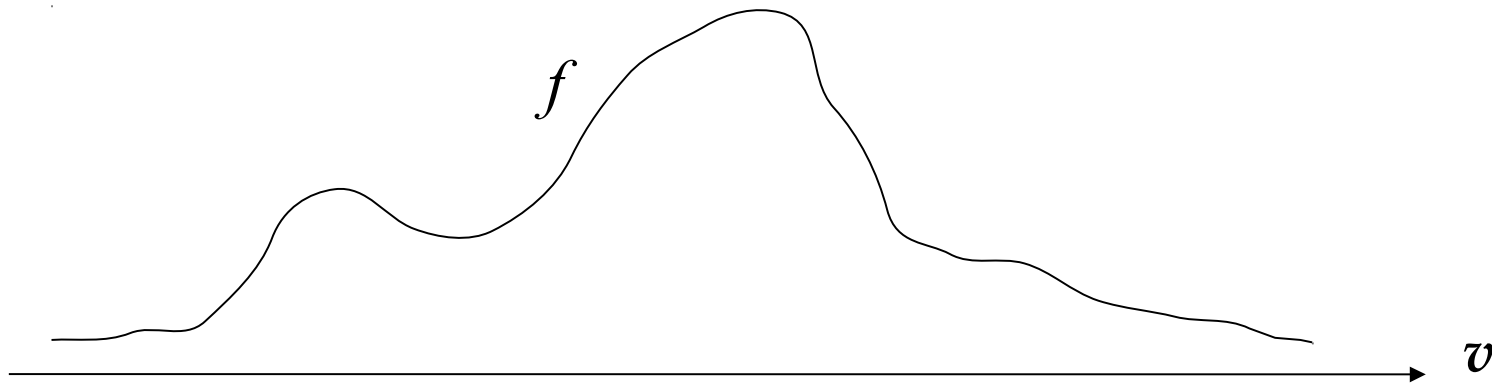
# Approche statistique

10000000000000000000000000 équations sur les positions / vitesses des particules !?

# Approche statistique

1000000000000000000000000 équations sur les positions / vitesses des particules !?

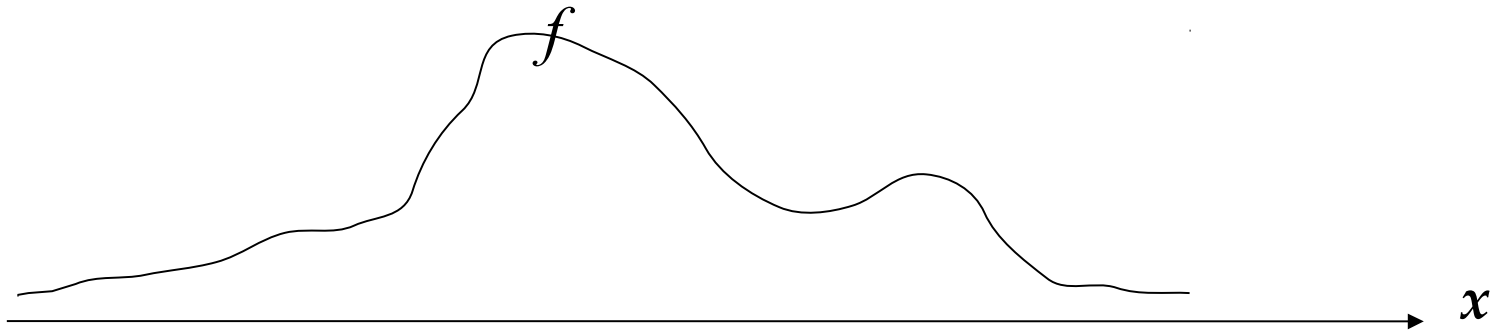
—▶ Une équation sur la **densité (= profil statistique)** des particules



# Approche statistique

10000000000000000000000000000000 équations sur les positions / vitesses des particules !?

→ Une équation sur la **densité (= profil statistique)** des particules

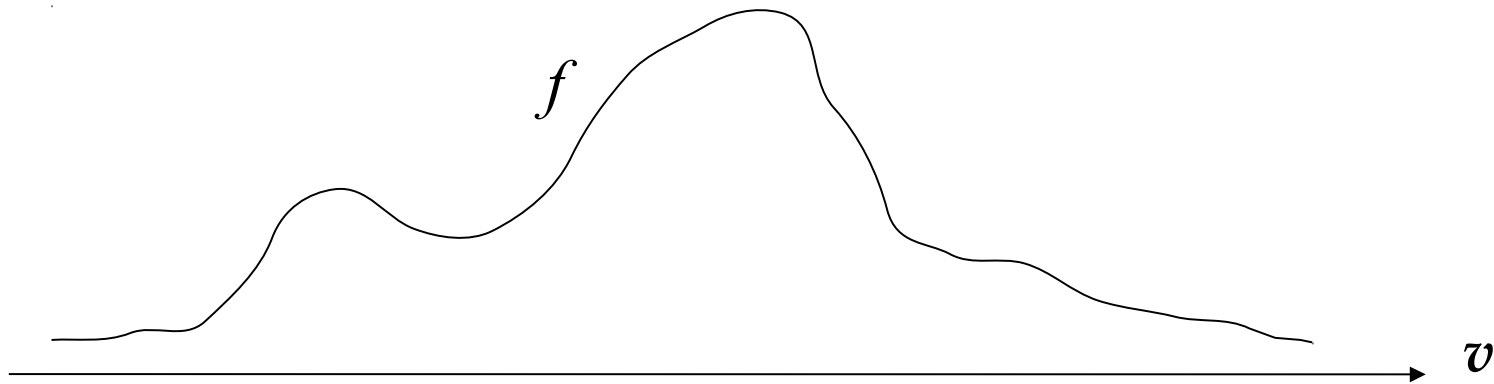




# Approche statistique

10000000000000000000000000000 équations sur les positions / vitesses des particules !?

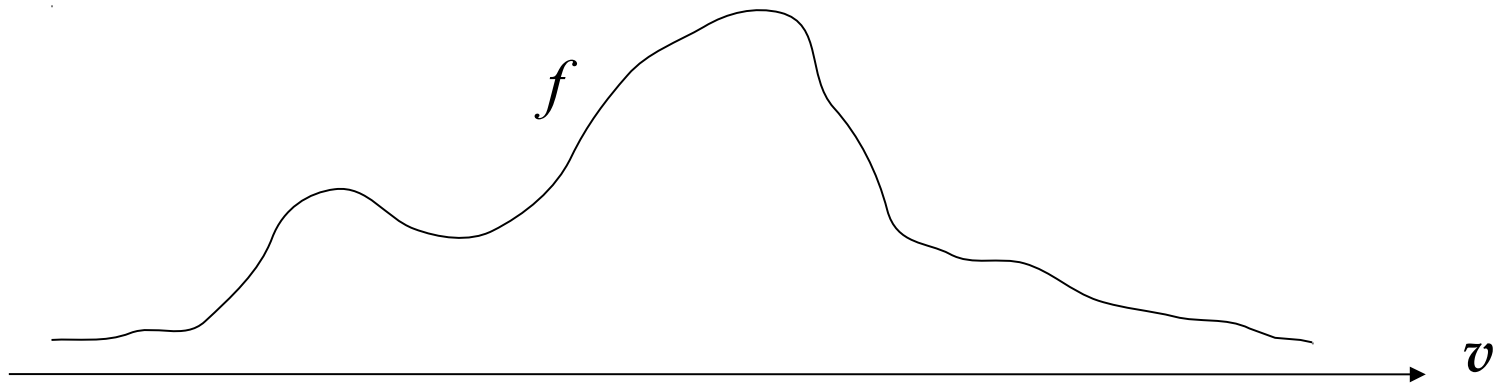
→ Une équation sur la **densité (= profil statistique)** des particules



# Approche statistique

10000000000000000000000000000 équations sur les positions / vitesses des particules !?

→ Une équation sur la **densité (= profil statistique)** des particules



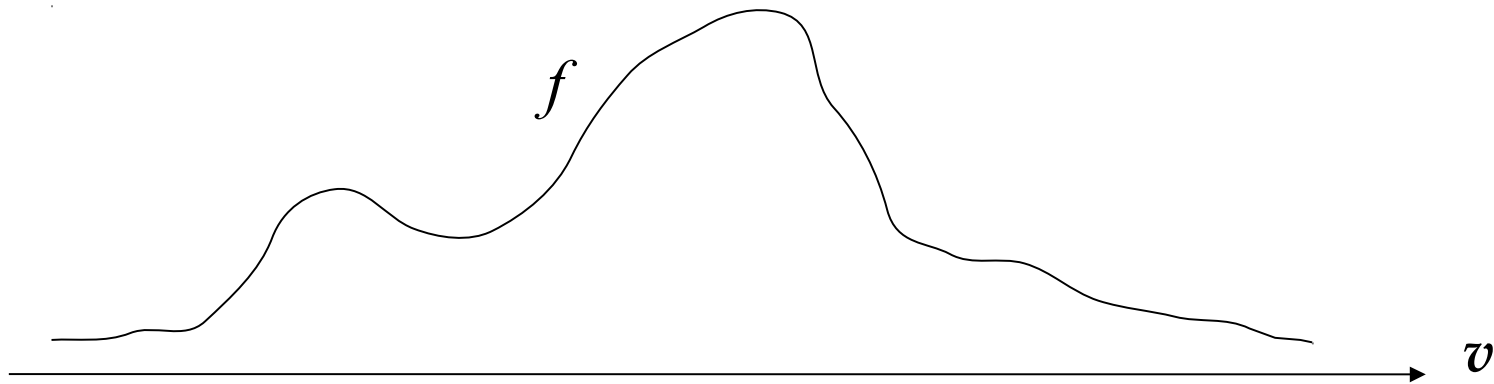
$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f)$$

transport                      collisions

# Approche statistique

1000000000000000000000000000000 équations sur les positions/vitesses des particules !?

→ Une équation sur la **densité (= profil statistique)** des particules



$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f)}$$

$$Q(f, f) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{S^{N-1}} \left[ f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \right] |v - v_*| d\sigma dv_*$$

# Du microscopique au macroscopique

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla V *_{x} \left( \int f dv \right) \cdot \nabla_v f = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f = \varepsilon Q_L(f, f)$$

$$= \varepsilon \nabla_v \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Pi_{(v-v_*)^\perp}}{|v-v_*|} \left( f(v_*) \nabla_v f(v) - f(v) \nabla_v f(v_*) \right) dv_* \right\}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f}$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho e + p) \vec{v}] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + r$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = C \Delta T = \frac{\partial}{\partial x} \left( C \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

# Du microscopique au macroscopique

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla V *_{x} \left( \int f dv \right) \cdot \nabla_v f = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f = \varepsilon Q_L(f, f)$$

$$= \varepsilon \nabla_v \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Pi_{(v-v_*)^\perp}}{|v-v_*|} \left( f(v_*) \nabla_v f(v) - f(v) \nabla_v f(v_*) \right) dv_* \right\}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f}$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho e + p) \vec{v}] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + r$$

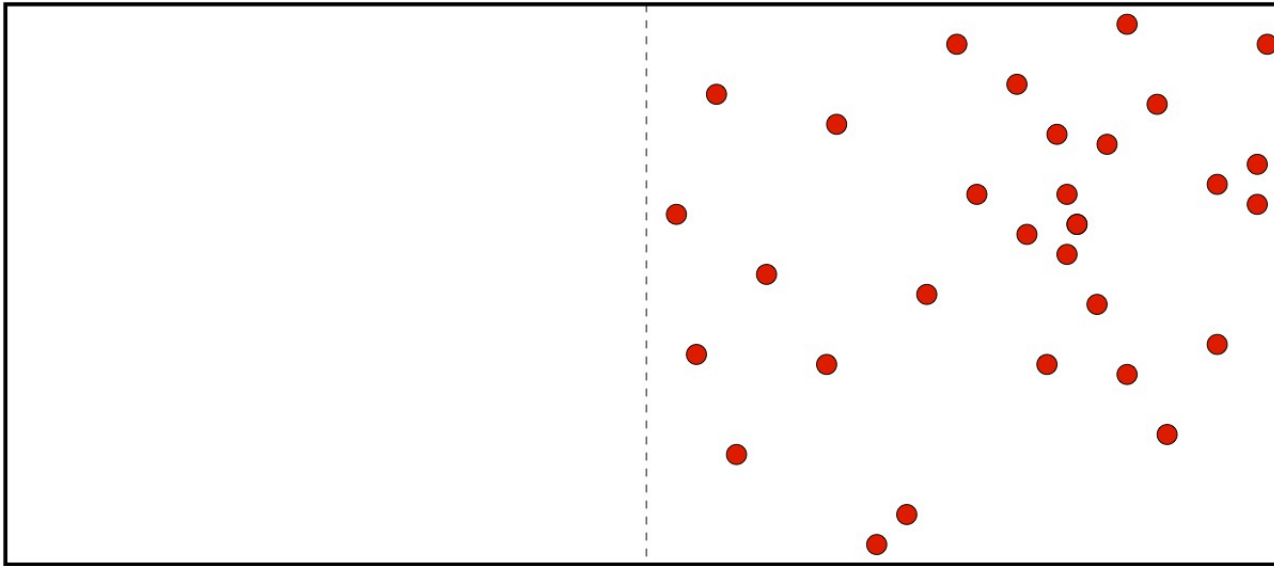
$$\frac{\partial T}{\partial t} = C \Delta T = \frac{\partial}{\partial x} \left( C \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Autant de mystères !

Ces équations s'appliquent bien mais ne sont pas « démontrées »

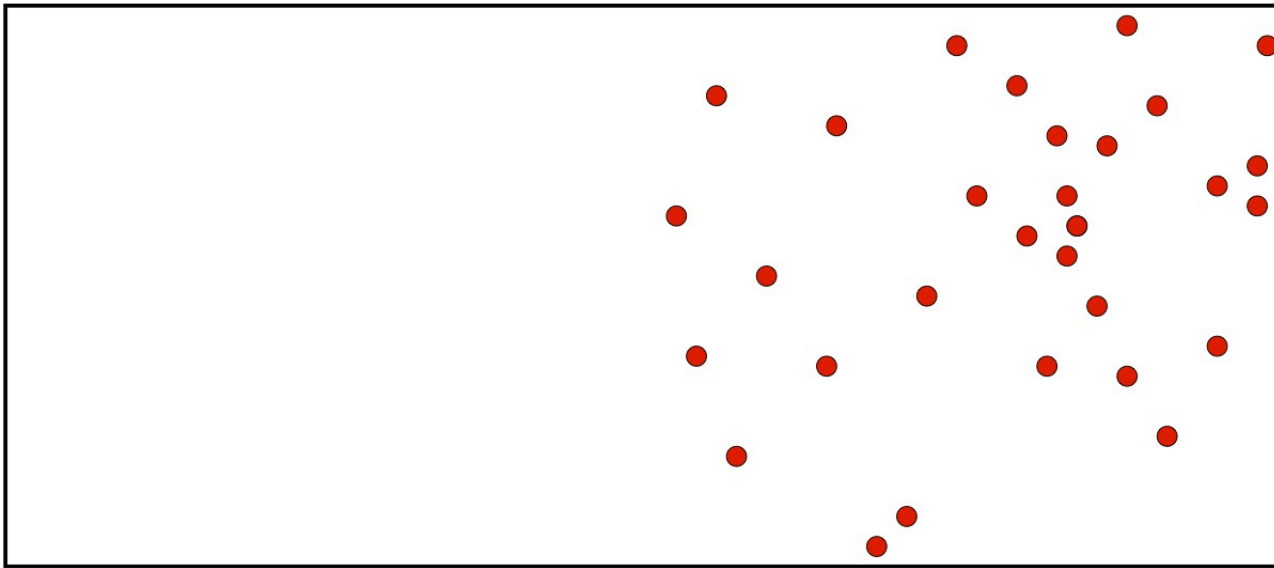
# Théorie de Boltzmann

Sous l'effet de processus microscopiques  
« aléatoires » et réversibles, l'entropie augmente toujours



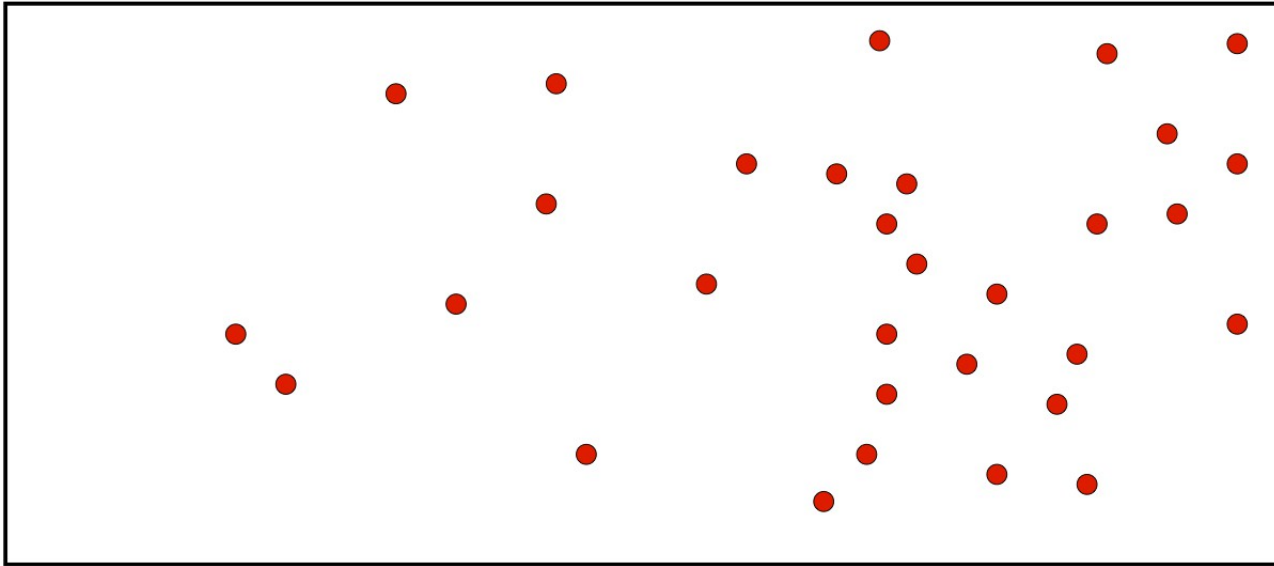
# Théorie de Boltzmann

Sous l'effet de processus microscopiques  
« aléatoires » et réversibles, l'entropie augmente toujours



# Théorie de Boltzmann

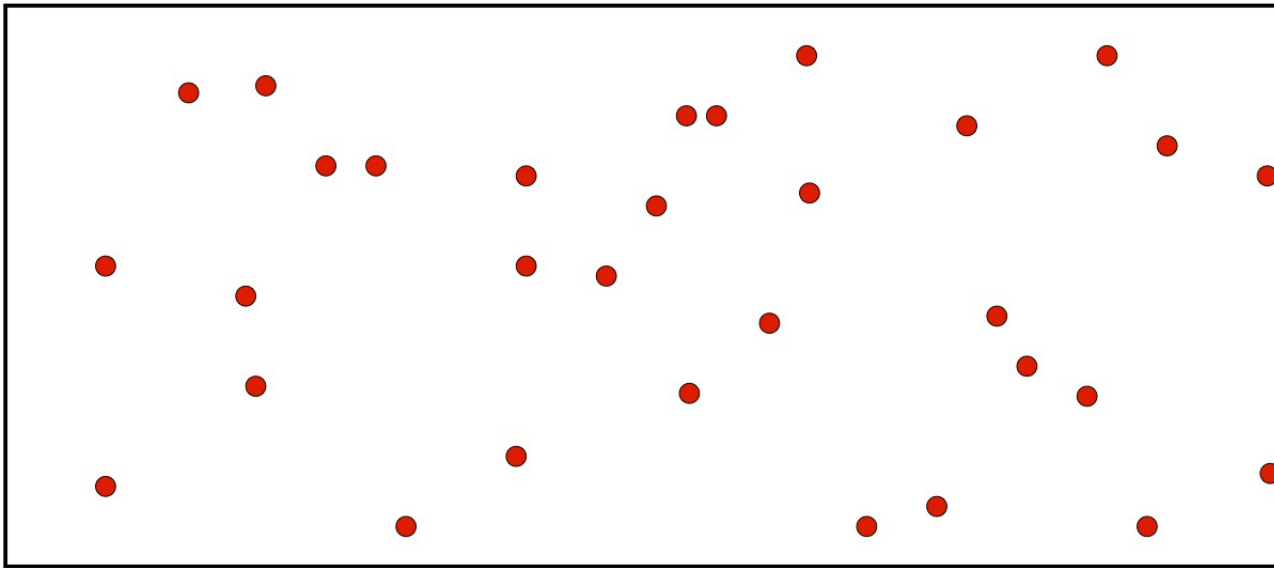
Sous l'effet de processus microscopiques  
« aléatoires » et réversibles, l'entropie augmente toujours





# Théorie de Boltzmann

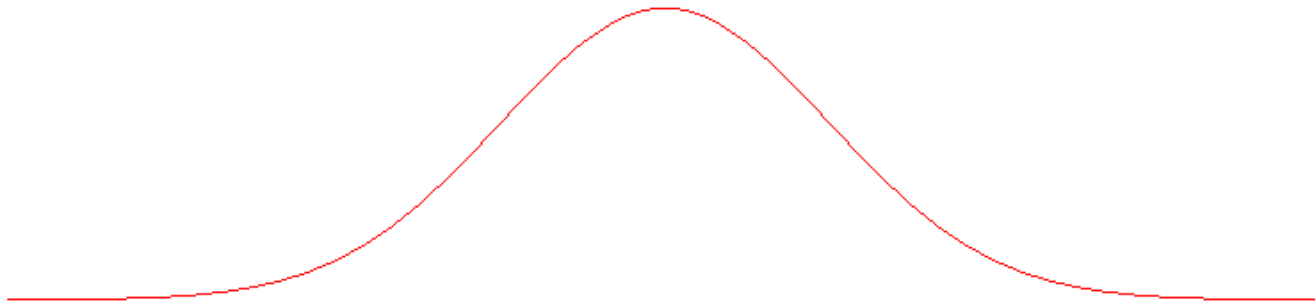
Sous l'effet de processus microscopiques  
« aléatoires » et réversibles, l'entropie augmente toujours



# Comportement qualitatif d'un gaz classique

La distribution statistique cherche à maximiser son entropie

→ **distribution gaussienne**



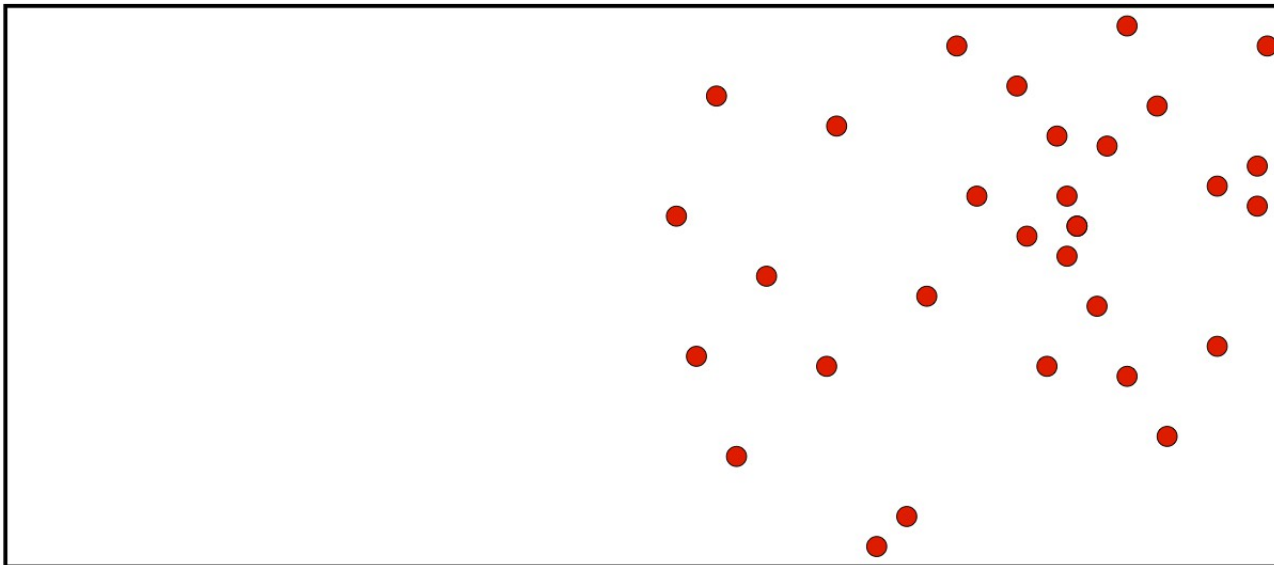
# Irréversibilité

La croissance de l'entropie implique une **flèche du temps**,  
due au caractère statistique / macroscopique

# Irréversibilité

La croissance de l'entropie implique une **flèche du temps**, due au caractère statistique / macroscopique

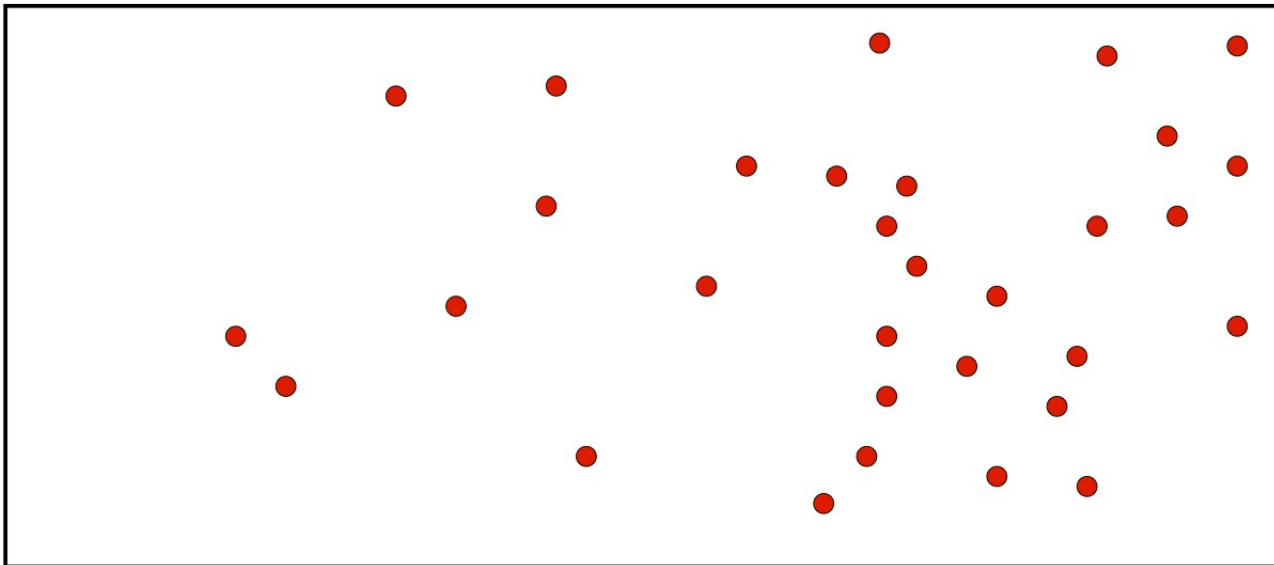
## Paradoxe de Zermelo (Poincaré)



# Irréversibilité

La croissance de l'entropie implique une **flèche du temps**, due au caractère statistique / macroscopique

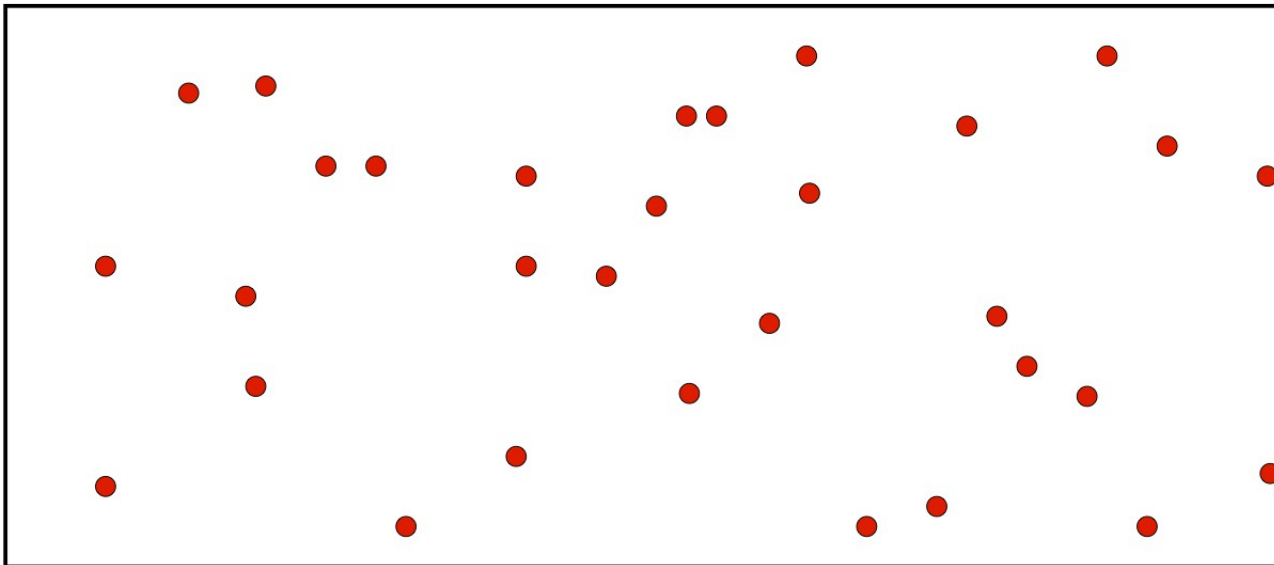
## Paradoxe de Zermelo (Poincaré)



# Irréversibilité

La croissance de l'entropie implique une **flèche du temps**, due au caractère statistique / macroscopique

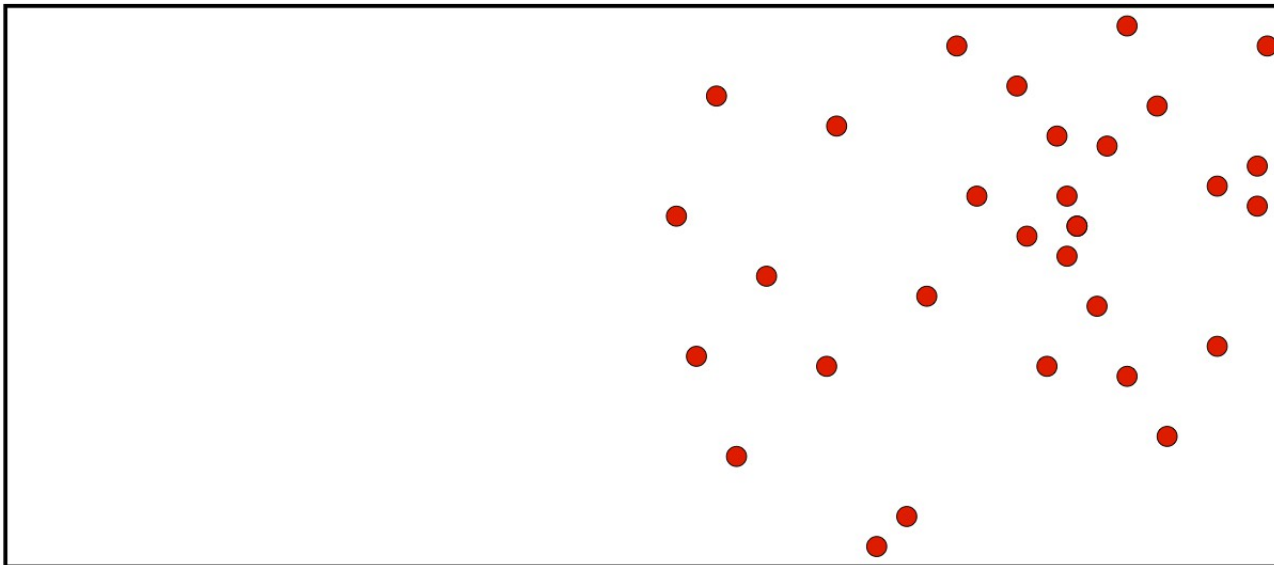
## Paradoxe de Zermelo (Poincaré)



# Irréversibilité

La croissance de l'entropie implique une **flèche du temps**, due au caractère statistique / macroscopique

## Paradoxe de Zermelo (Poincaré)



## LE MÉCANISME ET L'EXPÉRIENCE

Tout le monde connaît la conception mécaniste de l'univers qui a séduit tant de bons esprits et les différentes formes qu'elle a revêtues.

Les uns se représentent le monde matériel comme formé d'atomes qui se meuvent en ligne droite en vertu de leur inertie ; la vitesse ou la direction de ce mouvement ne peut changer que lorsque deux atomes se choquent.

Les autres admettent l'action à distance et supposent que les atomes exercent les uns sur les autres une attraction (ou une répulsion) qui dépend de la distance suivant une loi quelconque.

La première manière de voir n'est évidemment qu'un cas particulier de la seconde ; ce que je vais dire sera vrai de l'une et de l'autre. Les conclusions les plus importantes s'appliqueraient d'ailleurs au mécanisme cartésien où l'on suppose la matière continue.

Ce serait peut-être ici le lieu de discuter les difficultés métaphysiques que soulèvent ces conceptions ; mais je n'aurais pas pour cela l'autorité nécessaire. Au lieu d'entretenir les lecteurs de cette revue de ce qu'ils savent mieux que moi, je préfère leur parler de sujets qui leur sont moins familiers mais qui peuvent cependant les intéresser indirectement.

Je vais donc m'occuper des obstacles que les mécanistes ont rencontrés quand ils ont voulu concilier leur système avec les faits expérimentaux et des efforts qu'ils ont faits pour les vaincre ou les tourner.

Dans l'hypothèse du mécanisme, tous les phénomènes doivent être réversibles ; par exemple les astres pourraient parcourir leurs orbites dans le sens rétrograde sans que la loi de Newton fût violée ; il en

serait encore de même avec une loi d'attraction quelconque. Ce n'est donc pas là un fait particulier à l'astronomie, et la réversibilité est une conséquence nécessaire de toute hypothèse mécaniste.

L'expérience met au contraire en évidence une foule de phénomènes irréversibles. Par exemple si l'on met en présence un corps chaud et un corps froid, le premier cédera de la chaleur au second, le phénomène inverse ne se produira jamais. Et non seulement le corps froid ne restituera pas à l'autre la chaleur qu'il lui a prise lorsqu'ils agiront directement l'un sur l'autre ; mais quel que soit l'artifice qu'on emploie, les corps étrangers qu'on puisse faire intervenir, cette restitution restera impossible à moins que le gain ainsi réalisé ne soit compensé par une perte au moins équivalente. En d'autres termes si un système de corps peut passer de l'état A à l'état B par un certain chemin, il ne pourra pas revenir de l'état B à l'état A ni par le même chemin, ni par un chemin différent. C'est ce qu'on peut exprimer en disant que non seulement il n'y a pas *réversibilité directe*, mais qu'il n'y a pas même *réversibilité indirecte*.

On a cherché de plusieurs manières à échapper à cette contradiction ; d'abord par l'hypothèse des « mouvements cachés » de Helmholtz. On connaît l'expérience faite par Foucault au Panthéon à l'aide d'un très long pendule. Cet appareil semble tourner lentement, mettant ainsi en évidence la rotation terrestre. Un observateur qui ignorerait le mouvement de la terre, ne manquerait pas de conclure que les phénomènes mécaniques sont irréversibles. Le pendule tourne toujours dans le même sens et on n'a aucun moyen de le faire tourner en sens inverse ; il faudrait pour cela changer le sens de la rotation du globe. Un pareil changement est bien entendu irréalisable ; mais pour nous il est concevable ; il ne le serait pas pour un homme qui croirait notre planète immobile.

Eh bien, ne peut-on imaginer qu'il existe dans le monde moléculaire des mouvements analogues, qui sont cachés pour nous, sur lesquels nous n'avons aucune prise et dont nous ne pouvons changer le sens ?

Cette explication est séduisante, mais elle est insuffisante ; elle fait voir pourquoi il n'y a pas de réversibilité *directe* ; mais on démontre qu'il devrait y avoir quand même réversibilité *indirecte*.

Les Anglais ont proposé une hypothèse toute différente. Pour la faire comprendre, je me servirai encore d'une comparaison : si l'on a un hectolitre de blé et un grain d'orge, il sera facile de cacher ce



grain au milieu du blé; mais il sera presque impossible de le retrouver, de sorte que le phénomène semblera en quelque sorte irréversible. Cela tient à ce que les grains sont petits et nombreux; l'irréversibilité apparente des phénomènes naturels tiendrait de même à ce que les molécules sont trop petites et trop nombreuses pour la grossièreté de nos sens.

Pour mieux le faire comprendre, Maxwell introduit la fiction d'un « démon » dont les yeux seraient assez subtils pour distinguer les molécules, les mains assez petites et assez rapides pour les saisir. Pour un pareil démon, si l'on en croit les mécanistes, il n'y aurait pas de difficulté à faire passer de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud.

C'est du développement de cette idée qu'est née la théorie cinétique des gaz qui est jusqu'ici la tentative la plus sérieuse de conciliation entre le mécanisme et l'expérience.

Toutes les difficultés ne sont pas vaincues cependant.

Un théorème facile à établir nous apprend qu'un monde limité soumis aux seules lois de la mécanique, repassera toujours par un état très voisin de son état initial. Au contraire, d'après les lois expérimentales admises (si on leur attribue une valeur absolue et qu'on veuille en pousser les conséquences jusqu'au bout), l'univers tend vers un certain état final dont il ne pourra plus sortir. Dans cet état final, qui sera une sorte de mort, tous les corps seront en repos et à la même température.

Je ne sais si l'on a remarqué que les théories cinétiques anglaises peuvent se tirer de cette contradiction? Le monde, d'après elles, tend d'abord vers un état où il restera longtemps sans changement apparent; et cela est conforme à l'expérience; mais il ne s'y maintiendra pas toujours, de sorte que le théorème cité plus haut n'est pas violé; il y demeurera seulement pendant un temps énorme, d'autant plus long que les molécules seront plus nombreuses. Cet état ne sera donc pas la mort définitive de l'univers, mais une sorte de sommeil, d'où il se réveillera après des millions de millions de siècles.

A ce compte, pour voir la chaleur passer d'un corps froid à un corps chaud, il ne serait plus nécessaire d'avoir la vue fine, la présence d'esprit, l'intelligence et l'adresse du démon de Maxwell, il suffirait d'un peu de patience.

On voudrait pouvoir s'arrêter à cette étape et espérer qu'un jour le

télescope nous montrera un monde en train de se réveiller et où les lois de la thermodynamique seront renversées.

Malheureusement d'autres contradictions surgissent; Maxwell fait d'ingénieux efforts pour en triompher. Mais je ne suis pas sûr qu'il y ait réussi. Le problème est tellement compliqué qu'il est impossible de le traiter avec une complète rigueur. On est donc forcé de faire quelques hypothèses simplificatrices; sont-elles légitimes, sont-elles même conciliables entre elles? Je ne le crois pas. Je ne veux pas les discuter ici; mais il n'est pas besoin d'un long examen pour se défier d'un raisonnement où les prémisses sont en contradiction au moins apparente avec la conclusion, où l'on trouve en effet la réversibilité dans les prémisses et l'irréversibilité dans la conclusion.

Ainsi l'on n'est pas arrivé à tourner la difficulté qui nous occupe et il est peu probable qu'on y parvienne jamais. Ce serait même là une condamnation définitive du mécanisme si les lois expérimentales pouvaient être autre chose que des lois approchées.

H. POINCARÉ.

grain au milieu du blé; mais il sera presque impossible de le retrouver, de sorte que le phénomène semblera en quelque sorte irréversible. Cela tient à ce que les grains sont petits et nombreux; l'irréversibilité apparente des phénomènes naturels tiendrait de même à ce que les molécules sont trop petites et trop nombreuses pour la grossièreté de nos sens.

Pour mieux le faire comprendre, Maxwell introduit la fiction d'un « démon » dont les yeux seraient assez subtils pour distinguer les molécules, les mains assez petites et assez rapides pour les saisir. Pour un pareil démon, si l'on en croit les mécanistes, il n'y aurait pas de difficulté à faire passer de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud.

C'est du développement de cette idée qu'est née la théorie cinétique des gaz qui est jusqu'ici la tentative la plus sérieuse de conciliation entre le mécanisme et l'expérience.

Toutes les difficultés ne sont pas vaincues cependant.

Un théorème facile à établir nous apprend qu'un monde limité soumis aux seules lois de la mécanique, repassera toujours par un état très voisin de son état initial. Au contraire, d'après les lois expérimentales admises (si on leur attribue une valeur absolue et qu'on veuille en pousser les conséquences jusqu'au bout), l'univers tend vers un certain état final dont il ne pourra plus sortir. Dans cet état final, qui sera une sorte de mort, tous les corps seront en repos et à la même température.

Je ne sais si l'on a remarqué que les théories cinétiques anglaises peuvent se tirer de cette contradiction? Le monde, d'après elles, tend d'abord vers un état où il restera longtemps sans changement apparent; et cela est conforme à l'expérience; mais il ne s'y maintiendra pas toujours, de sorte que le théorème cité plus haut n'est pas violé; il y demeurera seulement pendant un temps énorme, d'autant plus long que les molécules seront plus nombreuses. Cet état ne sera donc pas la mort définitive de l'univers, mais une sorte de sommeil, d'où il se réveillera après des millions de millions de siècles.

A ce compte, pour voir la chaleur passer d'un corps froid à un corps chaud, il ne serait plus nécessaire d'avoir la vue fine, la présence d'esprit, l'intelligence et l'adresse du démon de Maxwell, il suffirait d'un peu de patience.

On voudrait pouvoir s'arrêter à cette étape et espérer qu'un jour le

télescope nous montrera un monde en train de se réveiller et où les lois de la thermodynamique seront renversées.

Malheureusement d'autres contradictions surgissent; Maxwell fait d'ingénieux efforts pour en triompher. Mais je ne suis pas sûr qu'il y ait réussi. Le problème est tellement compliqué qu'il est impossible de le traiter avec une complète rigueur. On est donc forcé de faire quelques hypothèses simplificatrices; sont-elles légitimes, sont-elles même conciliables entre elles? Je ne le crois pas. Je ne veux pas les discuter ici; mais il n'est pas besoin d'un long examen pour se défier d'un raisonnement où les prémisses sont en contradiction au moins apparente avec la conclusion, où l'on trouve en effet la réversibilité dans les prémisses et l'irréversibilité dans la conclusion.

Ainsi l'on n'est pas arrivé à tourner la difficulté qui nous occupe et il est peu probable qu'on y parvienne jamais. Ce serait même là une condamnation définitive du mécanisme si les lois expérimentales pouvaient être autre chose que des lois approchées.

H. POINCARÉ.

# Théorème de Lanford (1973)

Lanford obtient rigoureusement l'équation de Boltzmann pour  $N$  sphères dures de rayon  $r$ , dans la limite  $N \gg 1$   $r \ll 1$   $Nr \sim 1$



Sous hypothèse de **chaos moléculaire fort** au temps initial et sur un petit intervalle de temps....

(...Illner, Pulvirenti, Gallagher, Texier, Saint-Raymond...)

# Théorème de Lanford (1973)



Lanford obtient rigoureusement l'équation de Boltzmann pour  $N$  sphères dures de rayon  $r$ , dans la limite  $N \gg 1$   $r \ll 1$   $Nr \sim 1$

Sous hypothèse de **chaos moléculaire fort** au temps initial et sur un petit intervalle de temps....

(...Illner, Pulvirenti, Gallagher, Texier, Saint-Raymond...)

Ce résultat laisse de nombreuses questions en suspens, en particulier rien sur la **propagation du chaos** probable « moteur » de l'équation de Boltzmann

Mais il établit un **pont rigoureux** entre Newton (microscopique, inaccessible, réversible et chaotique) et Boltzmann (macroscopique, statistique et prévisible)

## QUELQUES RÉFÉRENCES

*Le mémoire de Poincaré pour le prix du Roi Oscar II,*  
F. Béguin (2006), in *L'Héritage scientifique de Poincaré*

*Mécanisme et Expérience, H. Poincaré,*  
*Revue de Métaphysique et Morale (1893)*

*(Ir)réversibilité et entropie, C. V.*  
*Séminaire Poincaré sur Le Temps (2010)*

*17 novembre 2012 : Journée Henri Poincaré à la Sorbonne*

---

*Sur les EDP de la physique mathématique (Intro, 1890)*

*La Valeur de la Science (1901)*

*Science et Hypothèse (1905)*

*Science et Méthode (1908)*