Le problème à 2 corps en astronomie

Jérôme PEREZ
Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées

Nous considérons deux corps A et B de masse m_A et m_B en interaction gravitationnelle. L'étude de leur mouvement constitue ce qu'il est convenu d'appeller le problème des deux corps. Ce problème à été posé et résolu par Newton dans ses *principia* en 1687, il est venu magistralement confirmer les relations expérimentales obtenues par Kepler de 1609 à 1630 (Lois de Kepler). Il s'agit de l'un des rares cas ou un problème gravitationnel est complètement intégrable.

Equations du mouvement

On suppose que le mouvement de A et B est rapporté à un référentiel (galiléen) d'origine fixe O. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit pour chacun des corps

$$m_A \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} = -Gm_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|^3}$$

$$m_B \frac{d^2\overrightarrow{OB}}{dt^2} = -Gm_B m_A \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^3}$$

comme $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont deux vecteurs de même norme et de sens opposé, la somme de ces deux équations donne

$$m_A \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + m_B \frac{d^2\overrightarrow{OB}}{dt^2} = \overrightarrow{0}$$

Le centre de gravité C du système repéré par le vecteur

$$\overrightarrow{R} = \frac{m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB}}{m_A + m_B}$$

est tel que

$$\frac{d^2\overrightarrow{R}}{dt^2} = \frac{m_A \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + m_B \frac{d^2\overrightarrow{OB}}{dt^2}}{m_A + m_B} = \overrightarrow{0}$$

ce dernier est donc animé d'un mouvement rectiligne uniforme

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta}$$

le référentiel centré sur C est donc galiléen. Les équations du mouvement dans ce référentiel s'écrivent

$$\begin{aligned} m_A \frac{d^2\overrightarrow{CA}}{dt^2} &= -Gm_Am_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|^3} \\ m_B \frac{d^2\overrightarrow{CB}}{dt^2} &= -Gm_Bm_A \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^3} \end{aligned} \tag{1}$$

On pourrait très bien étudier les mouvements respectifs de A et B par rapport à C mais la position de ce dernier est fictive, il est donc préférable d'étudier le mouvement relatif de l'un des points matériels par rapport à l'autre.

En soustrayant membre à membre la première équation de (1) divisée par m_A de la seconde divisée par m_B on obtient

$$\frac{d^2\overrightarrow{AB}}{dt^2} = -G\left(m_A + m_B\right)\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^3} \tag{2}$$

attachons à présent au point A un référentiel (non galiléen) dans lequel nous étudions le mouvement de B. Le retour vers le référentiel galiléen se faisant en utilisant la définition du barycentre $m_A\overrightarrow{CA} + m_B\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$ qui donne

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{m_A + m_B}{m_B}\overrightarrow{CA} = \frac{m_A + m_B}{m_A}\overrightarrow{CB}$$

En posant finalement $\mu = G\left(m_A + m_B\right)$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AB}$ et $r = \left|\overrightarrow{r}\right|$ l'équation (2) s'écrit sous la forme canonique suivante

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \tag{3}$$

Solution des équations du mouvement

Soit $\overrightarrow{\sigma_A}$ le moment cinétique de B, dans le référentiel centré sur A nous avons

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_B\overrightarrow{r}\wedge\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right) = m_B\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\wedge\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} - m_B\mu\overrightarrow{r}\wedge\frac{\overrightarrow{r}}{r^3} = \overrightarrow{0}$$

le moment cinétique de B se conserve donc en module et en direction, le mouvement de B dans le référentiel centré sur A est donc restreint au plan Axy orthogonal à $\overrightarrow{\sigma_A}$.

La vitesse de B est contenue dans ce plan, elle s'écrit en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{v_B} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{\varepsilon_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{\varepsilon_\theta}$$

où $\overrightarrow{\varepsilon_r}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_\theta}$ représentent les vecteurs unitaires du référentiel polaire. Le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_A}$ s'écrit donc

$$\overrightarrow{\sigma_A} = m_B\overrightarrow{r} \wedge \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = m_B\overrightarrow{r} \wedge \left(\frac{dr}{dt}\overrightarrow{\varepsilon_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{\varepsilon_\theta}\right)$$

c'est à dire

$$\overrightarrow{\sigma_A} = m_B r^2 \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{\varepsilon_\varphi}$$

où l'on a posé $\overrightarrow{\varepsilon_\varphi} = \overrightarrow{\varepsilon_r} \wedge \overrightarrow{\varepsilon_\theta}$. Ce moment cinétique étant conservé, la quantité $C = r^2\frac{d\theta}{dt}$ est donc une intégrale première du mouvement appelée constante des aires. La ligne joignant les deux points matériels A et B tourne donc avec une vitesse angulaire non constante $d\theta/dt = C/r^2$.

Relions à présent r à θ.

En multipliant l'équation du mouvement (3) par $\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$ il vient

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = -\mu\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$$

soit par simple intégration

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right)^2 - \frac{\mu}{r} = cte = \xi \tag{4}$$

cette constante ξ représente l'énergie totale du système. L'idée est alors d'écrire la viresse en coordonnées polaires et de l'insérer dans ξ. Nous avons (en utilisant le fait que $dt = r^2 d\theta/C$)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{dt}\overrightarrow{\varepsilon_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{\varepsilon_\theta}\right)^2 \\
&= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\
&= \left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right)\frac{C^2}{r^4 d\theta^2} \\
&= \left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right)\frac{C^2}{r^4}
\end{aligned}$$

l'équation (4) s'écrit donc

$$\left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right)\frac{C^2}{2r^4} - \left(\frac{\mu}{r} + \xi\right) = 0$$

on pose alors $u = \frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}$, il vient

$$\left(\left(\frac{dr}{du}\right)^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(u + \frac{\mu}{C^2}\right)^{-2}\right)\frac{C^2\left(u+\frac{\mu}{C^2}\right)^4}{2} - \left(\mu\left(u + \frac{\mu}{C^2}\right) + \xi\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(u + \frac{\mu}{C^2}\right)^2\right)\frac{C^2}{2} - \left(\mu\left(u + \frac{\mu}{C^2}\right) + \xi\right) = 0$$

en développant le carré nous avons finalement

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \alpha^2 - u^2 \tag{5}$$

avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{2\xi}{C^2}}$$

l'équation (5) s'intègre facilement, on a en effet

$$\frac{du}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} = \pm d\theta$$

le signe n'indiquant qu'un sens de parcours de l'orbite on obtient en choisissant le sens $-$

$$\arccos\left(\frac{u}{\alpha}\right) = \theta - \omega$$

l'angle ω correspondant à la constante d'intégration, en revenant à la variable r nous avons

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(f)}{p} \tag{6}$$

avec

$$e = \sqrt{1 + \frac{2C^2\xi}{\mu^2}} \qquad p = \frac{C^2}{\mu} \qquad f = \theta - \omega$$